

Programiranje 1

4. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Prikaz realnih brojeva u računalu — IEEE standard:
 - Osnovni oblik “floating-point” prikaza — mantisa i eksponent.
 - IEEE standard — tipovi: single, double, extended.
 - Greške zaokruživanja u prikazu.
 - Pojam “jedinične greške zaokruživanja”.
- Realna aritmetika računala — IEEE standard:
 - Greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija.
 - Relativna točnost izračunatog rezultata.
 - “Širenje” grešaka zaokruživanja.

Sadržaj predavanja (nastavak)

- Primjeri širenja grešaka i izbjegavanja grešaka:
 - Parcijalne sume harmonijskog reda.
 - Opasno ili “katastrofalno” kraćenje.
 - Korijeni kvadratne jednadžbe.
- Greške u praksi:
 - Promašaj raketa Patriot.

Informacije — odrada, kolokviji

Termin **odrade** predavanja 23. 1. 2015. je sutra:

- **subota**, 18. 10., od 10–12 u (003).

Programiranje 1 je u kolokvijskom razredu **F3**.

Službeni termini svih **kolokvija** su:

- **Prvi** kolokvij: **ponedjeljak**, 24. 11. 2014., u **15** sati.
- **Drugi** kolokvij: **ponedjeljak**, 2. 2. 2015., u **15** sati.
- **Popravni** kolokvij: **ponedjeljak**, 16. 2. 2015., u **15** sati.

Informacije — demonstratori za Prog1 i Prog2

Konačno nam je odobreno 6 demonstratora za Prog. To su:

- Angela Bašić–Šiško
- Tomislav Bujanović
- Gayatri Čaklović
- Ivan Čeh
- Iva Manojlović
- Sanjin Ružić

Najavite se demosima koji dan ranije, na pr. e-mailom.

- Njihove termine i e-mail adrese nađete na službenoj web-stranici kolegija.
- Postavite miša na ime, u prozoru kliknite na E-mail.

Informacije — dodaci ovom predavanju

Na webu imate dva dodatka ovom predavanju:

- Cijeli i realni brojevi — binarni prikaz i prikaz u računalu (algoritmi i primjeri),
- Aritmetika realnih brojeva i širenje grešaka zaokruživanja.

Nije obavezno, ali isplati se pogledati — za dopunu znanja.

Informacije — računi i prijava za zadaće

Ne zaboravite da treba:

- **preuzeti** korisnički račun u Računskom centru.
- Računi se “**preuzimaju**” **svaki dan**, od **12:30** do **14:30** sati.

Promijenite password!

Nadalje, treba:

- **obaviti prijavu** i, zatim, **potvrditi prijavu** u **aplikaciji** za tzv. “domaće zadaće”, na web-adresi

<http://degiorgi.math.hr/prog1/ku/>

Informacije — korektna prijava

Bitno: Prilikom prijave u aplikaciju za “ku”,

- svoje podatke trebate upisati korektno, što, između ostalog, znači i
- korištenje hrvatskih znakova u imenu i prezimenu!

Za početak, pažljivo čitajte upute na stranici za prijavu.

- Za svako od 6 polja koja treba popuniti,
 - dva gore, i još četiri malo niže — kod prve prijave,
- čim kliknete na polje,
 - uredno vam se pokaže uputa što treba upisati.

Zato, čitajte — prije popunjavanja i slanja!

Informacije — potvrda prijave, ispravci

Ako je **taj** dio **uredno** prošao, nakon kraćeg vremena,

- trebate dobiti **e-mail** na vašu adresu na **studentu**,
- u kojem piše **kako potvrditi** prijavu.

Kad to **uspješno** napravite, tek onda je prijava **gotova**.

Studenti koji su upisali “**csz dj**” varijantu imena i prezimena, ili imaju **problema** s **potvrdom** prijave

- neka se jave **e-mailom meni** na adresu

singer@math.hr

i napišu

- svoj **JMBAG** i **ispravno ime i prezime**.

Napomene o sigurnosti — lozinka (password)

Tom prilikom, zaista **nije** nužno da (onako **usput**)

- pošaljete i svoju **lozinku**, tj. **password**!

Upravo suprotno: **nemojte** to raditi!

Za početak, za sve što se radi pod nekim **korisničkim računom** ili **accountom**,

- **odgovoran** je **vlasnik** tog računa!

Ne vrijedi isprika da vam se netko **drugi** logirao umjesto vas!

A sve što vam treba za logiranje na račun su **dvije** stvari:

- **korisničko ime** ili **username** — koji se **vidi** kad ga kucate,
- **lozinka** iliti **password** — koji se **ne vidi**, i to s **razlogom**.

Napomene o sigurnosti (nastavak)

Zapamtite: password vam je

- jedina zaštita od “nezvanih” korisnika.

Zato nemojte koristiti “početni” password na studentu, već ga

- promijenite na nešto “tajno”, što zaista samo vi znate.

Kod prijave za zadaće, odmah si izaberite “vaš” password.

I, na kraju rada,

- uvijek treba uredno završiti rad, tj. “odlogirati” se.

Što mislite — kako funkcionira “on-line” kupovina!?

Prikaz “realnih” brojeva u računalu — IEEE standard

Uvod u prikaz realnih brojeva

Kako pohraniti “jako velike” ili “jako male” brojeve?
Recimo, dekadski pisano:

67800000000.0 0.000002078

Koristimo tzv. **znanstvenu** notaciju u kojoj

- prvo pišemo vodeće značajne znamenke broja,
- a zatim pišemo faktor koji ima oblik “baza na odgovarajući eksponent”, tj. potenciju baze.

U bazi 10, uz dogovor da vodeći dio bude **jednoznamenkast** ispred točke, tj. između 1 i 10 (strogo ispod), to izgleda ovako:

$6.78 \cdot 10^{10}$ $2.078 \cdot 10^{-6}$.

Prikaz realnih brojeva

U računalu se **binarni** zapis realnog broja pohranjuje u znanstvenom formatu:

$$\text{broj} = \text{predznak} \cdot \text{mantisa} \cdot 2^{\text{eksponent}}.$$

Mantisa se uobičajeno (postoje iznimke!) pohranjuje u tzv. **normaliziranom** obliku, tj. tako da vrijedi

$$1 \leq \text{mantisa} < (10)_2.$$

I za pohranu **mantise** i za pohranu **eksponenta** rezervirano je **konačno** mnogo binarnih znamenki. Posljedice:

- prikaziv je samo neki **raspon** realnih brojeva,
- neki brojevi **unutar** prikazivog raspona **nisu prikazivi**, jer im je mantisa **predugačka** \implies **zaokruživanje**.

Prikaz realnih brojeva (nastavak)

Primjer. Znanstveni prikaz binarnih brojeva:

$$1010.11 = 1.01011 \cdot 2^3$$

$$0.0001011011 = 1.011011 \cdot 2^{-4}$$

Primijetite da se vodeća jedinica u normaliziranom obliku **ne mora** pamtiti, ako znamo da je broj $\neq 0$.

- Taj bit se može upotrijebiti za pamćenje dodatne znamenke mantise.

Tada se vodeća jedinica zove **skriveni bit** (engl. hidden bit) — jer se **ne pamti**.

Ipak, ovo je samo pojednostavljeni prikaz realnih brojeva. Stvarni prikaz je malo složeniji.

Stvarni prikaz realnih brojeva

Najznačajnija promjena obzirom na pojednostavljeni prikaz:

- eksponent se prikazuje u “zamaskiranoj” ili “pomaknutoj” formi (engl. “biased form”).

To znači da se stvarnom eksponentu e

- dodaje konstanta — takva da je “pomaknuti” eksponent uvijek pozitivan.

Ta konstanta ovisi o broju bitova za eksponent i bira se tako da je prikaziva

- recipročna vrijednost najmanjeg pozitivnog normaliziranog broja.

Takav “pomaknuti” eksponent naziva se karakteristika, a normalizirana mantisa obično se zove signifikand.

Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE-754

Stvarni prikaz realnih brojeva ima **tri dijela** i svaki od njih ima svoju **duljinu** — broj bitova predviđenih za prikaz tog dijela.

- **predznak s** — uvijek zauzima **jedan** bit, i to **najviši**;
- **karakteristika k** — zauzima sljedećih w bitova (w = engl. “width”, širina pomaknutog eksponenta);
- **signifikand m** — zauzima sljedećih t bitova (t = engl. “trailing”, završni ili razlomljeni dio od m).

Po starom standardu — ako se **pamti** vodeći (cjelobrojni) bit mantise, on je **prvi** (vodeći) u m , a duljina je $t + 1$.

Još se koristi i standardna oznaka

- **preciznost $p := t + 1$** — to je **ukupni broj vodećih značajnih** bitova cijele mantise.

Stvarni prikaz realnih brojeva — IEEE–754

Karakteristika k se interpretira kao cijeli broj bez predznaka, tako da je $k \in \{0, \dots, 2^w - 1\}$. “Rubne” vrijednosti za k označavaju tzv. posebna stanja:

- $k = 0$ — nula i denormalizirani brojevi,
- $k = 2^w - 1$ — beskonačno i nije broj.

Sve ostale vrijednosti $k \in \{1, \dots, 2^w - 2\}$ koriste se za prikaz normaliziranih brojeva različitih od nule.

Veza između karakteristike k i stvarnog eksponenta e je:

$$k = e + bias, \quad bias = 2^{w-1} - 1.$$

Dakle, dozvoljeni eksponenti e moraju biti između

$$e_{\min} = -(2^{w-1} - 2) \quad \text{i} \quad e_{\max} = 2^{w-1} - 1.$$

Standardni tipovi realnih brojeva — IEEE-754

Novi standard IEEE-754 standard ima sljedeće tipove za prikaz realnih brojeva:

ime tipa	binary32	binary64	binary128
duljina u bitovima	32	64	128
$t =$	23	52	112
$w =$	8	11	15
$u = 2^{-p}$	2^{-24}	2^{-53}	2^{-113}
$u \approx$	$5.96 \cdot 10^{-8}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$9.63 \cdot 10^{-35}$
raspon brojeva \approx	$10^{\pm 38}$	$10^{\pm 308}$	$10^{\pm 4932}$

Broj u je tzv. jedinična greška zaokruživanja (v. malo kasnije).

Najveći tip binary128 još uvijek ne postoji u većini procesora.

Standardni tipovi realnih brojeva — extended

Većina **PC** procesora još uvijek ima posebni dio — tzv. **FPU** (engl. Floating-Point Unit). On **stvarno** koristi

- tip **extended** iz **starog** IEEE standarda, koji odgovara tipu **extended binary64** u **novom** **IEEE-754** standardu.

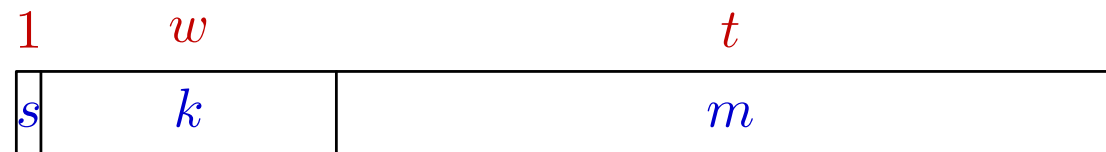
Dio primjera koje ćete vidjeti napravljen je baš u **tom tipu!**

ime tipa	extended
duljina u bitovima	80
$t + 1 =$	$63 + 1$
$w =$	15
$u = 2^{-p}$	2^{-64}
$u \approx$	$5.42 \cdot 10^{-20}$
raspon brojeva \approx	$10^{\pm 4932}$

Oznake

Oznake:

- **Crveno** — duljina odgovarajućeg polja u **bitovima**, bitove brojimo od **0**, zdesna nalijevo (kao i obično),
- **s** — predznak: **0** za pozitivan broj, **1** za negativan broj,
- **k** — karakteristika,
- **m** — mantisa (signifikand).



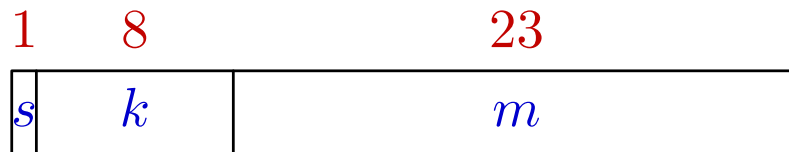
- Najznačajniji bit u odgovarajućem polju je **najljeviji**, a najmanje značajan bit je **najdesniji**.

Stvarni prikaz tipa single (binary32)

“Najkraći” realni tip je tzv. realni broj **jednostruke** točnosti. U C-u se taj tip zove **float**. Savjet: **ne koristiti** u praksi!

On ima sljedeća svojstva:

- duljina: 4 byte-a (32 bita), podijeljen u tri polja.



- u mantisi se **ne pamti** vodeća jedinica ako je broj normaliziran,
- **stvarni eksponent** e broja, $e \in \{-126, \dots, 127\}$,
- **karakteristika** $k = e + 127$, tako da je $k \in \{1, \dots, 254\}$,
- **karakteristike** $k = 0$ i $k = 255$ koriste se za “posebna stanja”.

Stvarni prikaz tipa single (nastavak)

Primjer. Broj $(10.25)_{10}$ prikažite kao broj u jednostrukoj točnosti.

$$\begin{aligned}(10.25)_{10} &= \left(10 + \frac{1}{4}\right)_{10} = (10 + 2^{-2})_{10} \\ &= (1010.01)_2 = 1.01001 \cdot 2^3.\end{aligned}$$

Prema tome je:

$$s = 0$$

$$k = e + 127 = (130)_{10} = (2^7 + 2^1)_{10} = 1000\ 0010$$

$$m = 0100\ 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 000$$

Prikazi nule: $k = 0, m = 0$

Realni broj **nula** ima **dva** prikaza:

● mantisa i karakteristika imaju **sve** bitove jednake **0**,
a predznak može biti

● **0** — “pozitivna nula”, ili

● **1** — “negativna nula”.

Ta dva prikaza nule su:

$+0 = 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$

$-0 = 1000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$

Smatra se da su vrijednosti ta dva broja **jednake** (kad se uspoređuju).

Denormalizirani brojevi: $k = 0, m \neq 0$

Ako je $k = 0$, a postoji **barem jedan** bit mantise koji **nije** nula, onda se kao eksponent uzima -126 (najmanji dozvoljeni). Mantisa takvog broja **nije normalizirana** i počinje s $0.m$.

Takvi brojevi zovu se **denormalizirani** brojevi.

Primjer. Kako izgleda prikaz realnog broja

$$0.000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 1011 \cdot 2^{-126}?$$

Rješenje:

$$s = 0$$

$$k = 0000\ 0000$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 1011$$

Plus i minus beskonačno: $k = 255, m = 0$

Ako je $k = 255$, a mantisa je **jednaka 0**, onda

- $s = 0$ — prikaz $+\infty$, skraćena oznaka **+Inf**,
- $s = 1$ — prikaz $-\infty$, skraćena oznaka **-Inf**.

Rezultat **Inf** (odnosno, **-Inf**) dobivamo ako

- pokušamo spremiti **preveliki** broj (tzv. “**overflow**”), ili
- ako nešto **različito** od nule podijelimo s **nulom**.

Primjer. Prikaz broja $+\infty$ ($-\infty$) je

$$s = 0 \quad (s = 1)$$

$$k = 1111 \ 1111$$

$$m = 000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000$$

Nije broj: $k = 255, m \neq 0$

Ako je $k = 255$ i postoji bar jedan bit mantise različit od nule, onda je to oznaka za

- tzv. “Not a Number” (“nije broj”) ili, skraćeno, NaN.

Rezultat NaN je uvijek signal da se radi o pogrešci. Na pr.,

- dijeljenje nule s nulom,
- vađenje drugog korijena iz negativnog broja i sl.

Primjer.

$$s = 0$$

$$k = 1111\ 1111$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0101\ 0000\ 0000$$

Greške zaokruživanja

Postoje realni brojevi koje **ne možemo egzaktno** spremiti u računalo, čak i kad su **unutar** prikazivog raspona brojeva. Takvi brojevi imaju **predugačku mantisu**.

Primjer. Realni broj (u binarnom zapisu)

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

ima **25** znamenki mantise i **ne može** se egzaktno spremiti u realni broj jednostruke točnosti, odnosno, tip **float** u **C**-u, koji ima **23 + 1** znamenki za mantisu. Što se onda zbiva?

Tada se pronalaze **dva najbliža prikaziva** susjeda B_- , B_+ , broju B , takva da vrijedi

$$B_- < B < B_+.$$

Greške zaokruživanja (nastavak)

U našem primjeru je:

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

$$B_- = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 011$$

$$B_+ = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 100$$

Nakon toga, **zaokružuje** se rezultat. Zaokruživanje može biti:

- prema **najbližem** broju (**standardno**, engl. “**default**”, za sve procesore) — ako su dva susjeda **jednako** udaljena od B , izabire “**parni**” od ta dva broja (**zadnji** bit je 0),
- prema **dolje**, tj. prema $-\infty$,
- prema **gore**, tj. prema $+\infty$,
- prema **nuli**, tj. odbacivanjem “viška” znamenki.

Greške zaokruživanja (nastavak)

Standardno zaokruživanje u našem primjeru:

$$B = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 0111$$

$$B_- = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 011$$

$$B_+ = 1.0001\ 0000\ 1000\ 0011\ 1001\ 100$$

Ovdje su B_- i B_+ jednako udaljeni od B , pa je zaokruženi B jednak B_+ , jer B_+ ima **parni** zadnji bit (jednak je **0**).

Jedinična greška zaokruživanja

Ako je $x \in \mathbb{R}$ unutar raspona brojeva prikazivih u računalu, onda se, umjesto x , sprema zaokruženi prikazivi broj $fl(x)$.

Time smo napravili grešku zaokruživanja $\leq \frac{1}{2}$ “zadnjeg bita” mantise (tj. $\leq \frac{1}{2} 2^{-t} = 2^{-p}$), i taj broj se zove

● jedinična greška zaokruživanja (engl. “unit roundoff”).

Standardna oznaka je u . Za float je

$$u = 2^{-24} \approx 5.96 \cdot 10^{-8}.$$

Vrijedi

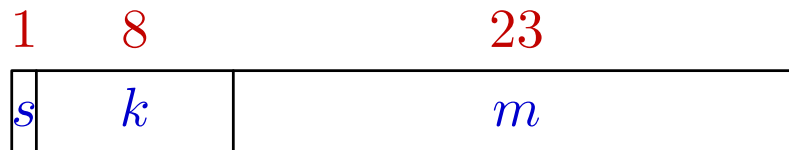
$$fl(x) = (1 + \varepsilon)x, \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je ε relativna greška napravljena tim zaokruživanjem.

Dakle, imamo vrlo malu relativnu grešku.

Prikaz brojeva jednostruke točnosti — sažetak

IEEE tip `single` = `float` u C-u:



Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-127)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 255, \\ (-1)^s * 2^{(-126)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \text{Inf} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m = 0, \\ \text{NaN} & \text{ako je } k = 255 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Raspon tipa float

Najveći prikazivi pozitivni broj je

$$\text{FLT_MAX} = (1 - 2^{-24}) \cdot 2^{128} \approx 3.402823466 \cdot 10^{38},$$

s prikazom

$$s = 0$$

$$k = 1111\ 1110$$

$$m = 111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 1111$$

Najmanji prikazivi normalizirani pozitivni broj je

$$\text{FLT_MIN} = 2^{-126} \approx 1.175494351 \cdot 10^{-38},$$

s prikazom

$$s = 0$$

$$k = 0000\ 0001$$

$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000$$

Raspon tipa float

Simboličke konstante `FLT_MAX`, `FLT_MIN` i još poneke vezane uz tip `float`, definirane su u datoteci zaglavlja `float.h` i mogu se koristiti u C programima.

Uočite:

- $1/\text{FLT_MIN}$ je **egzaktno** prikaziv (nađite prikaz),
- $1/\text{FLT_MAX}$ **nije egzaktno** prikaziv i zalazi u denormalizirane brojeve (tzv. “gradual **underflow**”).

Najmanji prikazivi denormalizirani pozitivni broj je $2^{-126} \cdot 2^{-23} = 2^{-149} \approx 1.4013 \cdot 10^{-45}$, s prikazom

$$s = 0$$

$$k = 0000\ 0000$$

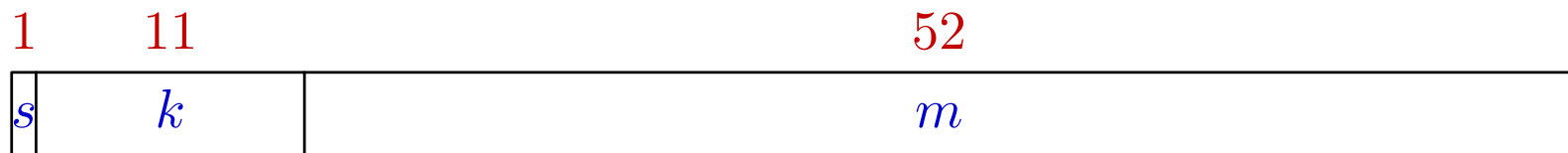
$$m = 000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0000\ 0001$$

Stvarni prikaz tipa double (binary64)

“Srednji” realni tip je tzv. realni broj **dvostruke** točnosti. U C-u se taj tip zove **double**. Savjet: njega **treba koristiti!**

On ima sljedeća svojstva:

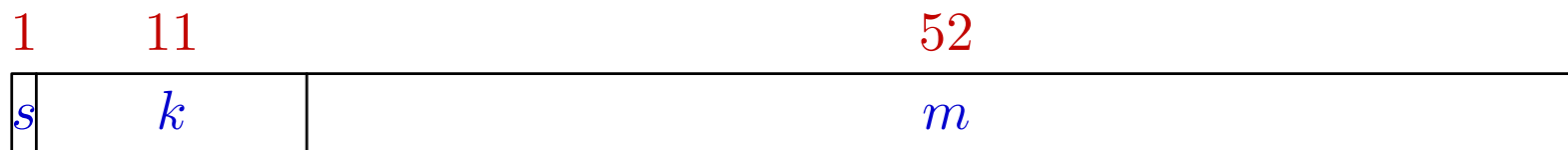
- Duljina: 8 byte-a (64 bita), podijeljen u **tri** polja.



- u mantisi se **ne pamti** vodeća jedinica ako je broj normaliziran,
- **stvarni eksponent** e broja, $e \in \{-1022, \dots, 1023\}$,
- **karakteristika** $k = e + 1023$, tako da je $k \in \{1, \dots, 2046\}$,
- **karakteristike** $k = 0$ i $k = 2047$ — “posebna stanja”.

Prikaz brojeva dvostruke točnosti — sažetak

IEEE tip `double` = `double` u C-u:



Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-1023)} * (1.m) & \text{ako je } 0 < k < 2047, \\ (-1)^s * 2^{(-1022)} * (0.m) & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m \neq 0, \\ (-1)^s * 0 & \text{ako je } k = 0 \text{ i } m = 0, \\ (-1)^s * \text{Inf} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m = 0, \\ \text{NaN} & \text{ako je } k = 2047 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Jedinična greška i raspon tipa double

Jedinična greška zaokruživanja za `double` je

$$u = 2^{-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}.$$

Broj $1 + 2u$ je najmanji prikazivi broj strogo veći od 1. Postoji

$$\text{DBL_EPSILON} = 2u \approx 2.2204460492503131 \cdot 10^{-16}.$$

Najveći prikazivi pozitivni broj je

$$\text{DBL_MAX} = (1 - 2^{-53}) \cdot 2^{1024} \approx 1.7976931348623158 \cdot 10^{308}.$$

Najmanji prikazivi normalizirani pozitivni broj je

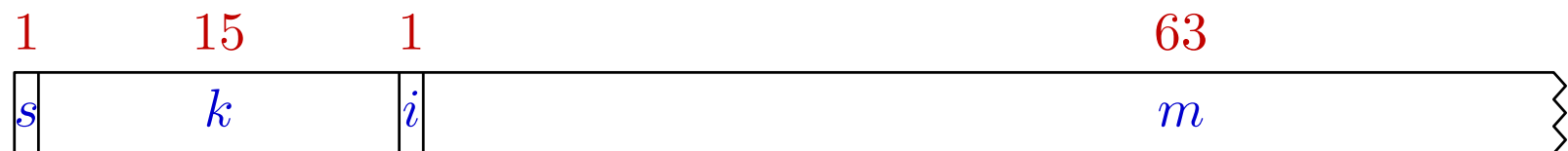
$$\text{DBL_MIN} = 2^{-1022} \approx 2.2250738585072014 \cdot 10^{-308}.$$

Tip extended

Stvarno računanje (na IA-32) se obično radi u “proširenoj” točnosti. U C-u je taj tip možda dohvatljiv kao `long double`.

On ima sljedeća svojstva:

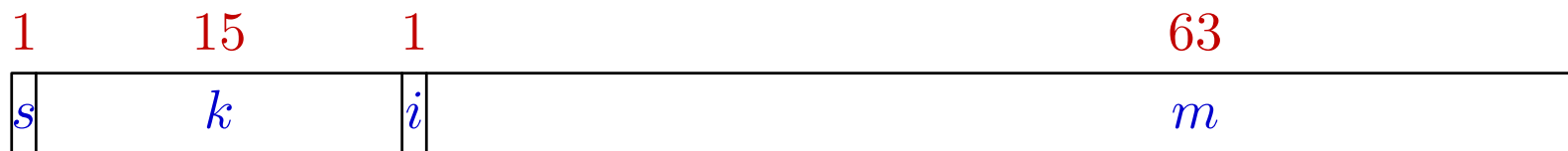
- Duljina: 10 byte-a (80 bita), podijeljen u četiri polja.



- u mantisi se pamti vodeći bit i mantise,
- stvarni eksponent e broja, $e \in \{-16382, \dots, 16383\}$,
- karakteristika $k = e + 16383$, tako da je $k \in \{1, \dots, 32766\}$,
- karakteristike $k = 0$ i $k = 32767$ — “posebna stanja”.

Prikaz brojeva proširene točnosti — sažetak

IEEE tip *extended*:



Vrijednost broja je

$$v = \begin{cases} (-1)^s * 2^{(k-16383)} * (i.m) & \text{ako je } 0 \leq k < 32767, \\ (-1)^s * \text{Inf} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m = 0, \\ \text{NaN} & \text{ako je } k = 32767 \text{ i } m \neq 0. \end{cases}$$

Uočite da **prva** mogućnost uključuje:

• **+0**, **-0** i **denormalizirane** brojeve (za $k = 0$),

jer se **pamti** vodeći “cjelobrojni” bit i mantise.

Realna aritmetika računala (IEEE standard)

Realna aritmetika računala — standard

Realna aritmetika računala nije egzaktna!

Razlog:

- Rezultat svake operacije mora biti prikaziv,
- pa dolazi do zaokruživanja.

Standard IEEE-754 za realnu aritmetiku računala propisuje da za sve četiri osnovne aritmetičke operacije vrijedi

- ista ocjena greške zaokruživanja kao i za prikaz brojeva,
- tj. da izračunati rezultat ima malu relativnu grešku.

Isto vrijedi i za neke matematičke funkcije, poput $\sqrt{\quad}$, ali ne vrijedi za sve funkcije (na pr. za \cos i \sin u okolini nule).

Realna aritmetika računala — zaokruživanje

Neka je \circ bilo koja od aritmetičkih operacija $+$, $-$, $*$, $/$, i neka su x i y prikazivi operandi (drugih, ionako, nema u računalu).

- Ako su x i y u dozvoljenom, tj. normaliziranom rasponu,
- i ako se egzaktni rezultat $x \circ y$, također, nalazi u normaliziranom rasponu (ne mora biti prikaziv),

za računalom izračunati (prikazivi) rezultat $fl(x \circ y)$ onda vrijedi

$$fl(x \circ y) = (1 + \varepsilon)(x \circ y), \quad |\varepsilon| \leq u,$$

gdje je u jedinična greška zaokruživanja za dani tip brojeva. Ova ocjena odgovara zaokruživanju egaktnog rezultata!

Prava relativna greška ε ovisi o x , y , operaciji \circ , i stvarnoj realizaciji aritmetike računala.

Posljedice zaokruživanja u realnoj aritmetici

Napomena. Bez pretpostavki o **normaliziranom** rasponu, prethodni rezultat **ne vrijedi** — greška može biti **puno veća!**

Zbog **zaokruživanja**, u realnoj aritmetici računala, nažalost,

- **ne vrijede** uobičajeni **zakoni** za aritmetičke operacije na skupu \mathbb{R} .

Na primjer, za aritmetičke operacije u **računalu**

- **nema asocijativnosti** zbrajanja i množenja,
- **nema distributivnosti** množenja prema zbrajanju.

Dakle, **poredak izvršavanja operacija** je **bitan!**

Zapravo, **jedino** standardno pravilo koje **vrijedi** je

- **komutativnost** za zbrajanje i za množenje.

Širenje grešaka zaokruživanja — *ukratko*

Vidimo da gotovo **svaki** izračunati rezultat ima neku **grešku**.

Kad imamo **puno** aritmetičkih operacija, dolazi do tzv.

- **akumulacije** ili **širenja** grešaka.

Očekujemo da greške **rastu**, ali koliko: “**pomalo**” ili “**brzo**”?

Zapamtite: Jedina “**opasna**” operacija u aritmetici računala je

- **oduzimanje bliskih** brojeva — tzv. “**kraćenje**”, tj. kad

- iz **velikih** brojeva, **aditivnim** operacijama dobivamo **male**.

To može **drastično povećati** grešku (v. primjer malo kasnije).

Više o greškama zaokruživanja — u **Numeričkoj matematici**.

- Možete pogledati i **dodatak** ovom predavanju (na webu).

Primjer: Neasocijativnost zbrajanja

Primjer neasocijativnosti zbrajanja

Primjer. **Asocijativnost** zbrajanja u računalu **ne vrijedi**.

Znamo (odn. uskoro ćete znati) da je tzv. **harmonijski** red

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i} + \dots$$

divergentan, tj. suma mu je “**beskonačna**”.

No, nitko nas ne spriječava da računamo **konačne** početne komade ovog reda, tj. **njegove parcijalne sume**

$$S_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

A kojim **redom** zbrajamo? (Zbrajanje je **binarna** operacija!)

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

U **realnim** brojevima je **potpuno svejedno** kojim poretkom zbrajanja računamo ovu sumu, jer vrijedi **asocijativnost**.

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

Uostalom, sam zapis izraza **bez zagrada**

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

već “podrazumijeva” **asocijativnost**. U suprotnom, morali bismo **zagradama** naglasiti **poredak** operacija.

Ovdje imamo točno $n - 1$ **binarnih operacija zbrajanja**, i možemo ih napraviti **kojim redom hoćemo**.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Drugim riječima, u prethodni izraz za S_n

- možemo rasporediti zagrade na **bilo koji način**, samo da svi plusevi budu “**binarni**”, tj. zbrajaju **dva** objekta, a objekt je **broj** ili (podizraz u zagradama).

Na pr., zbrajanju “**unaprijed**” odgovara raspored zagrada

$$S_{n,1} := \left(\dots \left(\left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n},$$

a zbrajanju “**unatrag**” odgovara raspored zagrada

$$S_{n,2} := 1 + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \dots \right) \right).$$

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Koliko takvih rasporeda zagrada ima — bit će napravljeno u **Diskretnoj matematici** (tzv. **Catalanovi brojevi**). Bitno nam je samo da svi ti rasporedi, matematički, daju **isti rezultat**.

Komutativnost nam uopće **ne treba**. Ako i nju iskoristimo, dobivamo još puno **više** načina za računanje ove sume, i svi, naravno, opet daju **isti rezultat**.

Izračunajmo **aritmetikom računala** navedene **dvije** sume

• $S_{n,1}$ — unaprijed, i

• $S_{n,2}$ — unatrag,

za $n = 1\,000\,000$, u **tri** standardne **IEEE** točnosti: **single**, **double** i **extended**. Preciznije, koristimo ova tri tipa za prikaz brojeva, uz pripadne aritmetike za računanje.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Uz skraćene oznake S_1 i S_2 za **varijable** u kojima zbrajamo pripadne sume, odgovarajući **algoritmi** za zbrajanje su

● **unaprijed:**

$$S_1 := 1,$$

$$S_1 := S_1 + \frac{1}{i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

● **unatrag:**

$$S_2 := \frac{1}{n},$$

$$S_2 := \frac{1}{i} + S_2, \quad i = n - 1, \dots, 1.$$

Dakle, zaista **ne koristimo** komutativnost zbrajanja.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Dobiveni rezultati za sume S_1 , S_2 i pripadne relativne greške su:

tip i suma	vrijednost	rel. greška
single S_1	14.3573579788208008	2.45740E-0003
single S_2	14.3926515579223633	5.22243E-0006
double S_1	14.3927267228647810	6.54899E-0014
double S_2	14.3927267228657545	-2.14449E-0015
extended S_1	14.3927267228657234	1.91639E-0017
extended S_2	14.3927267228657236	-1.08475E-0018

Slovo E u brojevima zadnjeg stupca znači “puta 10 na”, pa je, na primjer, $-1.08475E-0018 = -1.08475 \times 10^{-18}$.

Primjer neasocijativnosti zbrajanja (nastavak)

Izračunate vrijednosti S_1 i S_2 su različite (u sve tri točnosti). Dakle, zbrajanje brojeva u aritmetici računala, očito, nije asocijativno.

Primijetite da, u sve tri točnosti, zbrajanje unatrag S_2 daje nešto točniji rezultat. To nije slučajno.

Svi brojevi koje zbrajamo su istog predznaka pa zbroj stalno raste, bez obzira na poredak zbrajanja.

- Kad zbrajamo unatrag — od manjih brojeva prema većim, zbroj se pomalo “nakuplja”.
- Obratno, kad zbrajamo unaprijed — od velikih brojeva prema manjim, zbroj puno brže naraste. Pred kraj, mali dodani član jedva utječe na rezultat (tj. dobar dio znamenki pribrojnika nema utjecaj na sumu).

Primjer: “Katastrofalno” kraćenje

Primjer katastrofalnog kraćenja

Zakruživanjem ulaznih podataka dolazi do male relativne greške. Kako ona može utjecati na konačan rezultat?

Primjer. Uzmimo realnu aritmetiku “računala” u bazi 10. Za mantisu (značajni dio broja) imamo $p = 4$ dekadске znamenke, a za eksponent 2 znamenke (što nije bitno). Neka je

$$\begin{aligned}x &= 8.8866 = 8.8866 \times 10^0, \\y &= 8.8844 = 8.8844 \times 10^0.\end{aligned}$$

Umjesto brojeva x i y , koji nisu prikazivi, u “memoriju” spremamo brojeve $fl(x)$ i $fl(y)$, pravilno zaokružene na $p = 4$ znamenke

$$\begin{aligned}fl(x) &= 8.887 \times 10^0, \\fl(y) &= 8.884 \times 10^0.\end{aligned}$$

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Ovim zaokruživanjima napravili smo **malu** relativnu grešku u x i y (ovdje je $u = \frac{1}{2} b^{-p} = 5 \times 10^{-5}$).

Razliku $fl(x) - fl(y)$ računamo tako da **izjednačimo eksponente** (što već jesu), **oduzmemo** značajne dijelove (mantise), pa **normaliziramo**

$$\begin{aligned} fl(x) - fl(y) &= 8.887 \times 10^0 - 8.884 \times 10^0 \\ &= 0.003 \times 10^0 = 3.??? \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Kod normalizacije, zbog pomaka “**ulijevo**”, pojavljuju se

● **?** = znamenke koje više **ne možemo** restaurirati (ta informacija se **izgubila**).

Što sad?

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Računalo radi **isto** što bismo i mi napravili:

👉 na ta mjesta ? upisuje 0.

Razlog: da rezultat bude **točan**, ako su **polazni** brojevi **točni**. Dakle, ovo oduzimanje je **egzaktno** i u aritmetici računala.

Konačni **izračunati** rezultat je $fl(x) - fl(y) = 3.000 \times 10^{-3}$.

Pravi rezultat je

$$\begin{aligned}x - y &= 8.8866 \times 10^0 - 8.8844 \times 10^0 \\ &= 0.0022 \times 10^0 = 2.2 \times 10^{-3}.\end{aligned}$$

Već **prva** značajna znamenka u $fl(x) - fl(y)$ je **pogrešna**, a relativna greška je **ogromna**! Uočite da je ta znamenka (**3**), ujedno, i **jedina** koja nam je ostala — sve ostalo se **skratilo**!

Primjer katastrofalnog kraćenja (nastavak)

Prava **katastrofa** se događa ako $3.??? \times 10^{-3}$ uđe u naredna zbrajanja (oduzimanja), a onda se **skrati** i ta **trojka!**

Uočite da je **oduzimanje** $fl(x) - fl(y)$ bilo **egzaktno** i u aritmetici našeg “**računala**”, ali **rezultat je**, svejedno, **pogrešan**.

Krivac, očito, **nije oduzimanje** (kad je egzaktno).

- Uzrok su **polazne greške** u operandima.

Ako njih **nema**, tj. ako su polazni operandi **egzaktni**,

- i dalje, naravno, dolazi do **kraćenja**,

- ali je **rezultat** (uglavnom, a po IEEE standardu **sigurno**) **egzaktan**,

pa se ovo kraćenje onda zove **benigno kraćenje**.

Primjer: Kvadratna jednadžba

Kvadratna jednadžba

Uzmimo da treba riješiti (realnu) kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdje su a , b i c zadani, i vrijedi $a \neq 0$.

Matematički gledano, problem je lagan: imamo 2 rješenja

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Numerički gledano, problem je mnogo izazovniji:

- ni uspješno računanje po ovoj formuli,
- ni točnost izračunatih korijena,

ne možemo uzeti “zdravo za gotovo”.

Kvadratna jednadžba — standardni oblik

Za početak, jer znamo da je $a \neq 0$, onda jednadžbu možemo **podijeliti** s a , tako da dobijemo tzv. “**normalizirani**” oblik

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Po standardnim formulama, rješenja ove jednadžbe su

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Međutim, u praksi, stvarno **računanje** se radi po formuli

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

s tim da na početku izračunamo i **zapamtimo** $p/2$ ili $-p/2$.
Ovim postupkom **štedimo** jedno množenje (ono s 4).

Kvadratna jednadžba — problem

Primjer. Rješavamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 56x + 1 = 0$.

U dekadskoj aritmetici s $p = 5$ značajnih znamenki dobijemo

$$x_1 = 28 - \sqrt{783} = 28 - 27.982 = 0.018000,$$

$$x_2 = 28 + \sqrt{783} = 28 + 27.982 = 55.982.$$

Točna rješenja su

$$x_1 = 0.0178628\dots \quad \text{i} \quad x_2 = 55.982137\dots$$

Apsolutno **manji** od ova dva korijena — x_1 , ima **samo dvije** točne znamenke (**kraćenje**), relativna greška je $7.7 \cdot 10^{-3}$!

Apsolutno veći korijen x_2 je “savršeno” **točan**.

Kvadratna jednadžba — popravak

Prvo izračunamo **većeg** po apsolutnoj vrijednosti, po formuli

$$x_2 = \frac{-(b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac})}{2a} = -\frac{p}{2} - \text{sign}(p)\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

a **manjeg** po apsolutnoj vrijednosti, izračunamo iz

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q$$

(Vieta), tj. formula za x_1 je

$$x_1 = \frac{c}{x_2 a} = \frac{q}{x_2}.$$

Opasnog **kraćenja** za x_1 više **nema!**

Kvadratna jednadžba (nastavak)

Ovo je bila samo **jedna**, od (barem) **tri** “opasne” točke za računanje. Preostale **dvije** su:

- “kvadriranje” pod korijenom — mogućnost za **overflow**.
Rješenje — “skaliranjem”.
- **oduzimanje** u diskriminanti (**kraćenje**) — **nema** jednostavnog rješenja. Naime, “krivac” **nije** aritmetika.
 - To je samo odraz tzv. **nestabilnosti** problema, jer tad imamo **dva bliska korijena** koji su **vrlo osjetljivi** na male **perturbacije** koeficijenata jednadžbe.
 - Na primjer, pomak c = pomak grafa “gore–dolje”. **Mali** pomak rezultira **velikom** promjenom korijena!

Primjer “greške” iz prakse

Promašaj raketa Patriot

U prvom Zaljevskom ratu, 25. veljače 1991. godine, američke rakete Patriot nisu uspjele oboriti iračku Scud raketu iznad Dhahrana u Saudijskoj Arabiji.

- Scud raketa je pukim slučajem pala na američku vojnu bazu — usmrativši 28 i ranivši stotinjak ljudi.



Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Istraga otkriva sljedeće:

- Računalo koje je upravljalo Patriot raketama, vrijeme je brojilo u desetinkama sekunde proteklim od trenutka paljenja (uključivanja) sustava.
- Desetinka sekunde binarno

$$0.1_{10} = (0.00011)_2.$$

- To računalo prikazivalo je realne brojeve korištenjem nenormalizirane mantise duljine 23 bita.
- Spremanjem broja 0.1 u registar takvog računala radi se (apsolutna) greška $\approx 9.5 \cdot 10^{-8}$ (sekundi).

Ne izgleda puno ... , a kamo li opasno.

Promašaj raketa Patriot (nastavak)

Detalji:

- Računalo je bilo u pogonu 100 sati, pa je ukupna greška **zaokruživanja** bila (stalno se zbraja, svakih 0.1 sekundi)

$$100 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10 \cdot 9.5 \cdot 10^{-8} = 0.34 \text{ s.}$$

- Scud raketa putuje **brzinom** $\approx 1.6 \text{ km/s}$, pa je “tražena” više od **pola kilometra** daleko od stvarnog položaja.
- Greška je uočena **dva tjedna ranije**, nakon 8 sati rada jednog drugog sustava. Modifikacija programa stigla je **dan nakon** nesreće.
- Posade sustava mogle su i **dva tjedna ranije** dobiti uputu “**isključi/uključi računalo**” svakih nekoliko sati — ali je **nisu** dobile.