

# *Programiranje 1*

## *3. predavanje*

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

# Sadržaj predavanja

- Osnovni tipovi podataka u računalu (pregled):
  - Višekratnici byte-a, odn. riječi (bez strukture).
  - Znakovi, logičke vrijednosti.
  - Cijeli brojevi bez predznaka i s predznakom.
  - “Realni” (floating–point) brojevi.
- Cijeli brojevi — prikaz i aritmetika:
  - Prikaz brojeva bez predznaka — sustav ostataka.
  - Modularna aritmetika cijelih brojeva.
  - Dijeljenje cijelih brojeva — kvocijent i ostatak.
  - Prikaz brojeva s predznakom — sustav ostataka, dijeljenje.
  - Tipične pogreške u korištenju cijelih brojeva.

# Informacije — odrada, kolokviji

Termin **odrade** predavanja 27. 1. 2017. je:

- **subota**, 22. 10., od 10–12 u (003).

Programiranje 1 je u kolokvijskom razredu **F3**.

Službeni termini svih **kolokvija** su:

- **Prvi** kolokvij: **petak**, 2. 12. 2016., u **15** sati.
- **Drugi** kolokvij: **petak**, 10. 2. 2017., u **15** sati.
- **Popravni** kolokvij: **petak**, 24. 2. 2017., u **15** sati.

## Informacije — računi i prijava za zadaće

Ne zaboravite da treba napraviti neke stvari vezane uz

- **papir** kojeg ste dobili u **indeksu**, za pristup računalima.

Na tom papiru piše i vaše **korisničko ime** na **studentu**.

- To je ono “**kratko**” (**bez** znaka @ i dodataka, koji **naliče** na **e-mail** adresu) = **login** u praktimumima i za webmail.

Za početak, **promijenite** početnu lozinku (**password**).

- Kako — piše pri dnu papira, i **zapamtite novu!**

Nadalje, obavezno trebate:

- **obaviti prijavu** i, zatim, **potvrditi prijavu**

u **aplikaciji** za domaće zadaće (“**ku**”), na internetskoj adresi

<http://degiorgi.math.hr/prog1/ku/>

## Informacije — korektna prijava, hrvatski znakovi

Kod **prve** prijave u aplikaciju, treba **popuniti 6** polja:

- **dva gore** = JMBAG (10 znamenki), lozinka,
- i još **četiri malo niže** = potvrda lozinke, ime, prezime, korisničko ime = **ono s papira** (bitno za potvrdu).

Čim **kliknete** na neko polje — **prije** no što išta stignete,

- uredno vam se pokaže **uputa što treba upisati**.

Zato, pažljivo **čitajte upute** — **prije popunjavanja** i slanja!

**Bitno:** Prilikom **prijave** u aplikaciju za “ku”,

- svoje **podatke** trebate upisati **korektno** — što znači i
- korištenje **hrvatskih** znakova u **imenu i prezimenu!**

## Informacije — potvrda prijave, ispravci

Ako je **taj** dio **uredno** prošao, nakon kraćeg vremena,

- trebate dobiti **e-mail** na vašu adresu na **studentu**,
- u kojem piše **kako potvrditi** prijavu.

Kad to **uspješno** napravite, tek onda je prijava **gotova**.

Studenti koji su upisali “**csz dj**” varijantu imena i prezimena, ili imaju **problema** s **potvrdom** prijave

- neka se jave **e-mailom** (sa **studenta**) **meni** na adresu

**singer@math.hr**

i napišu

- svoj **JMBAG** i **ispravno** ime i prezime.

# Prikaz podataka u računalu

# Sadržaj

- Osnovni tipovi podataka u računalu (pregled):
  - Višekratnici byte-a, odn. riječi (bez strukture).
  - Znakovi, logičke vrijednosti.
  - Cijeli brojevi bez predznaka.
  - Cijeli brojevi s predznakom.
  - “Realni” (floating–point) brojevi.



# Osnovni tipovi podataka u računalu

Jednostavno rečeno, osnovni ili fundamentalni tipovi podataka u računalu su:

- one cjeline ili blokovi bitova s kojima računalo “zna nešto raditi”, i to neovisno o njihovom sadržaju.

To znači da postoje instrukcije koje nešto rade s tim cjelinama kao operandima, bez obzira na eventualni dodatni tip operanda. U ovom kontekstu je

- tip = interpretacija (odnosno, značenje) sadržaja.

Tipični primjer takvih instrukcija su

- instrukcije za transfer tih cjelina između memorije i registara procesora.

# Osnovni tipovi podataka (nastavak)

Ako se sjetimo “pravokutnog” izgleda memorije, onda u te tipove sigurno ulaze

- osnovne cjeline koje možemo adresirati, dakle, ono što smo ranije (u skici memorije) nazvali riječ/byte.

Napomena: kasnije smo se dogovorili da pojam “riječ” znači nešto drugo — prostor za spremanje cijelih brojeva.

Osim toga, ovisno o veličini “osnovne stranice” (jedne adrese) memorije, računalo može “znati” raditi i s

- manjim cjelinama — dijelovima osnovne cjeline, ako je ona dovoljno velika (jedan byte se ne dijeli),
- većim cjelinama — blokovima osnovnih cjelina.

# Osnovni tipovi podataka (nastavak)

Vidimo da ti osnovni tipovi vrlo ovise o arhitekturi računala.

Obzirom na to da sadržaj nije bitan, zapravo, jedino što se može reći o tim cjelinama je

- njihova duljina — u bitovima.

Naravno, imena ili nazivi za cjeline istih duljina variraju na raznim arhitekturama.

Za nas kao korisnike, ovi tipovi nisu naročito važni, ali

- zgodno ih je upoznati (navesti njihove duljine i nazive), barem na jednom primjeru.

**Primjer.** Intelova 32-bitna arhitektura procesora (IA-32).

# Osnovni tipovi podataka na IA-32

Osnovna cjelina koju možemo adresirati na IA-32 je

1 byte = 8 bitova.

To je duljina “osnovne stranice” (jedne adrese) memorije.

Ostali osnovni tipovi podataka na IA-32 su većih duljina:

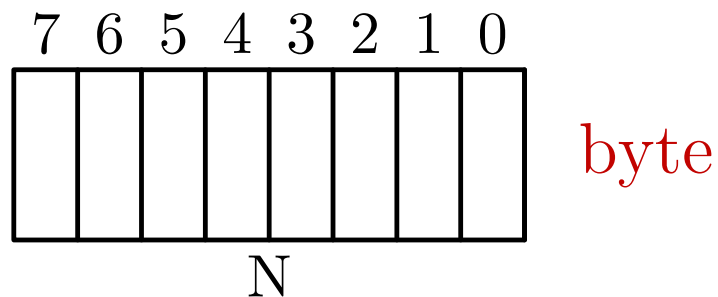
Naziv	Duljina (bitova)	Broj byteova
word	16	2
doubleword	32	4
quadword	64	8
double quadword	128	16

# Označavanje bitova i adresa

Na primjeru osnovnih tipova podataka zgodno je odmah **uvesti** još **dvije** stvari:

- **standardne oznake** za **bitove** unutar pojedine cjeline (koriste se **općenito**, a ne samo na IA-32),
- način **adresiranja** pojedinih dijelova cjeline, obzirom na **raspored bitova** (specifično za pojedinu arhitekturu).

Jedan **byte**, duljine  $n = 8$  bitova, na **adresi N**, označavamo ovako (svaka “kućica” je **1 bit**):



# Označavanje bitova i adresa (nastavak)

**Objašnjenje oznaka:** Uzmimo da neka **cjelina** (u ovom slučaju, osnovni tip podataka) ima duljinu od  $n$  bitova.

- Tradicionalno se **pojedini bitovi** u cjelini **indeksiraju** slično kao i riječi u memoriji, dakle, od  $0$  do  $n - 1$ .

Međutim, ovdje poredak ide “**naopako**”, tako da

- “**najdesniji**” bit ima indeks  $0$  — **najniži** ili **zadnji** bit,
- “**najljeviji**” bit ima indeks  $n - 1$  — **najviši** ili **vodeći** bit.

Razlog: **pozicioni prikaz** cijelih brojeva (u **bazi 2**), u kojem **vodeću** znamenku (bit) pišemo kao prvu (**lijevu**), a **najnižu** znamenku (bit) pišemo kao zadnju (**desnu**). Osim toga, **indeksi** bitova odgovaraju pripadnim **potencijama** baze  $2$ .

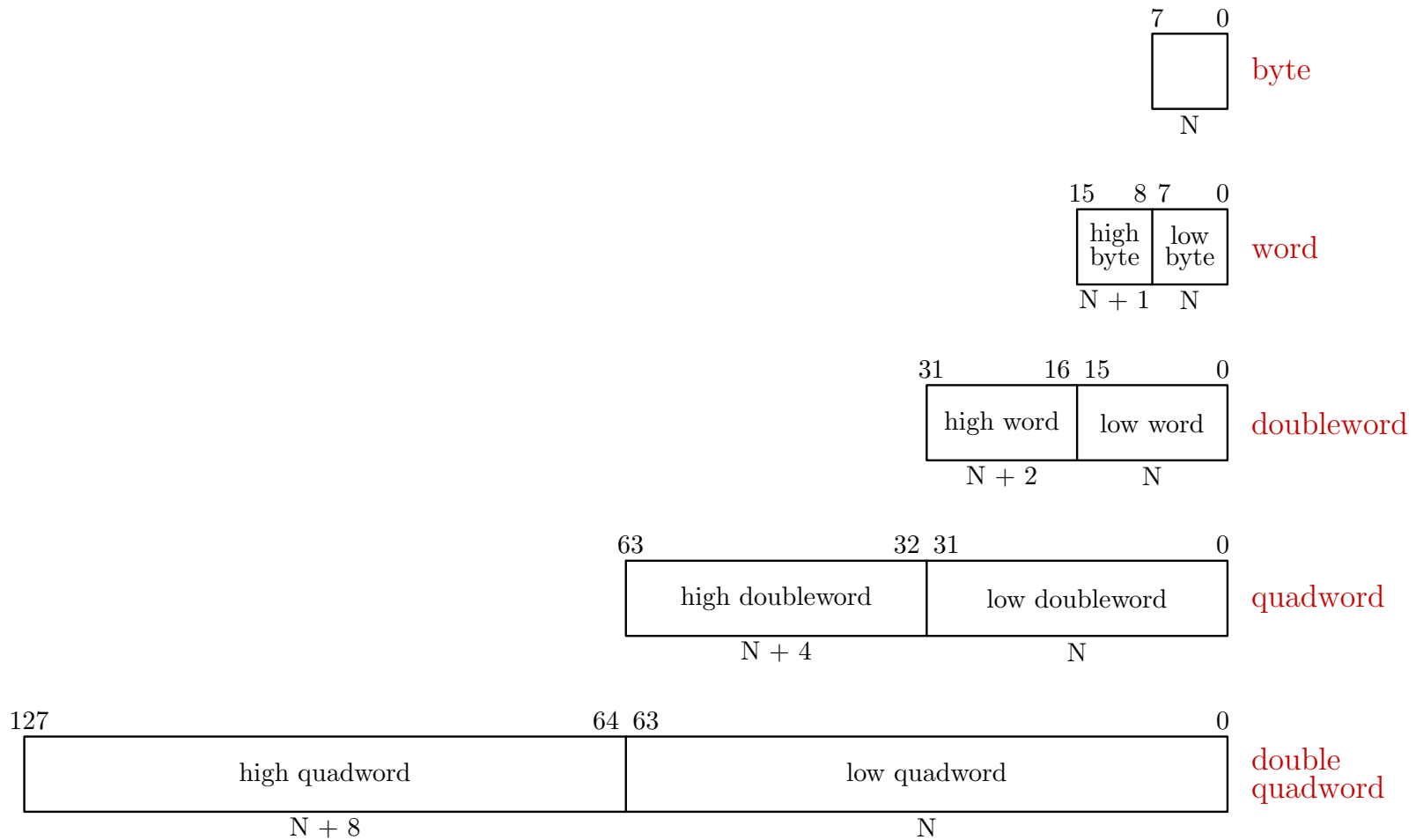
Detalji malo kasnije!

# Označavanje bitova i adresa (nastavak)

- Ove oznake za bitove katkad pišemo iznad, a katkad ispod skice cjeline (ali značenje je uvijek očito iz slike).
- Na početku ih pišemo iznad, jer ispod skice pišemo adrese na kojima se nalaze pojedini adresabilni dijelovi cjeline — u ovom slučaju, to su byteovi (adresabilne cjeline na IA-32 su byteovi).
- Na IA-32, najniži byteovi su i na najnižim adresama, ali postoje arhitekture računala na kojima je obratno, tj. vodeći dio je na najnižoj adresi.
- Dogovorno, najniža adresa — na kojoj “počinje” cjelina, je, ujedno, i adresa čitave cjeline (bez obzira na poredak dijelova). Ovo se standardno koristi u C-u.

# Osnovni tipovi podataka na IA-32 (nastavak)

Osnovni tipovi podataka na IA-32 onda izgledaju ovako:





# Jednostavni tipovi podataka

Ponovimo, ovi osnovni tipovi podataka nisu jako korisni, jer s njima ne možemo ništa “pametnije” raditi, osim transfera.

Za stvarno “računanje”, trebamo

- dodatnu interpretaciju sadržaja (bitova) cjeline i
- operacije s takvom vrstom podataka (cjelinom bitova).

Skup podataka i operacije na njima čine neku algebarsku strukturu, koju zajedničkim imenom zovemo tip podataka.

Oni tipovi podataka za koje računalo “zna” ili može:

- prikazati pripadni skup podataka i
- izvesti pripadne operacije na njima,

zovu se jednostavni tipovi podataka.

# Jednostavni tipovi podataka (nastavak)

Pojam “jednostavni” znači da su operacije na toj vrsti podataka izravno podržane arhitekturom računala, tj.

- postoje instrukcije za njih.

Dakle, te operacije su elementarne operacije (za računalo kao izvršitelja) i, u principu, su brze.

Standardne jednostavne tipove podataka možemo grubo podijeliti u dvije grupe:

- nenumerički tipovi — znakovi, logička algebra,
- numerički tipovi — “cijeli” i “realni” brojevi (nekoliko raznih tipova za obje vrste brojeva).

Vidjet ćemo da se nenumerički tipovi, zapravo, svode na numeričke.

# Nenumerički tipovi podataka (pregled)

Ukratko o **nenumeričkim** tipovima podataka.

## Znakovi:

- prikaz je u nekom **kôdu** (obično, nadskup **ASCII kôda**), tj. **cijelim brojevima**,
- posebna operacija sa znakovima (osim transfera) **nema**. Sve **funkcije** na znakovima svode se na elementarne operacije na cijelim brojevima (vidi **C**).

Dakle, znakovi **nisu** izravno vezani za arhitekturu računala, ali su **jednostavni** tip u operacijskim sustavima i programskim alatima.

Uglavnom, služe za “humani” **ulaz** i **izlaz**, te kao dijelovi složenijih struktura podataka.

# Znakovi (primjer)

Znakovni tip u programskom jeziku C zove se `char`.

---

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    char c = '1';

    printf("%c\n", c);    /* 1 */
    printf("%d\n", c);    /* 49 */

    return 0;
}
```

---

`%c` — piše vrijednost kao znak (`char`),

`%d` — piše vrijednost kao cijeli broj (`int`), i to decimalno.

# Nenumerički tipovi podataka (pregled)

Logička ili Booleova algebra:

- logičke vrijednosti prikazuju se bitovima,

$$\text{laž} = 0, \quad \text{istina} = 1,$$

koje, opet, možemo uzeti i kao cijele brojeve,

- osnovne operacije **ne**, **i**, **ili** (engl. **not**, **and**, **or**), svode se na aritmetičke operacije u bazi 2.

Logičke operacije mogu se izvesti i bit-po-bit na čitavim skupinama bitova u nekoj većoj cjelini (vidi C).

Za nas kao korisnike, logička algebra služi za formulaciju i kombiniranje uvjeta u uvjetnim naredbama i petljama.

## Logičke vrijednosti (primjer)

C nema posebni tip za **logičke** vrijednosti, već izravno koristi cijele brojeve: laž = 0, istina = 1.

---

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    int i = 10, j = 20;

    printf("%d\n", i < j);    /* 1 */
    printf("%d\n", i >= j);  /* 0 */
    printf("%d\n", i == j);  /* 0 */

    return 0;
}
```

---

# Numerički tipovi podataka (pregled)

Numerički tipovi podataka moraju realizirati

- četiri osnovne aritmetičke operacije na raznim skupovima brojeva.

Osnovni problem: standardni skupovi brojeva u matematici

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

su beskonačni i ne možemo ih prikazati u računalu.

Umjesto toga, u računalu možemo prikazati samo neke konačne podskupove odgovarajućeg matematičkog skupa.

Drugim riječima,

- konačni podskup je “model” beskonačnog skupa.

# Numerički tipovi podataka (pregled)

Numeričke tipove možemo podijeliti u tri grupe, prema beskonačnom skupu kojeg “modeliramo”:

- “cijeli” brojevi bez predznaka — model za  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,
- “cijeli” brojevi s predznakom — model za  $\mathbb{Z}$ ,
- “realni” brojevi — model za  $\mathbb{R}$ .

Navodnici naglašavaju da su pripadni “prikazivi” skupovi brojeva konačni.

Dodatno, svaka grupa ima nekoliko “podtipova”, ovisno o “veličini” pripadnog konačnog skupa prikazivih brojeva, tj.

- ovisno o broju bitova predviđenom za prikaz.



# Numerički tipovi podataka (pregled)

Osim toga, prijelaz na **konačne** skupove bitno **mijenja realizaciju aritmetike** na odgovarajućem skupu. Aritmetika se **ne nasljeđuje** projekcijom s originalnog skupa!

Za **potpuni opis** numeričkih tipova podataka, moramo još opisati:

- koji konačni skupovi brojeva **modeliraju** odgovarajuće matematičke skupove,
- kako se točno **prikazuju** njihovi elementi u računalu,
- kako se **realizira aritmetika** na tim skupovima.

Detalji u nastavku.

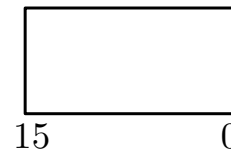
Prije toga, za **ilustraciju**, pogledajmo kako izgledaju ove **tri grupe** numeričkih tipova podataka (s podtipovima) na IA-32 arhitekturi.

# Numerički tipovi podataka na IA-32

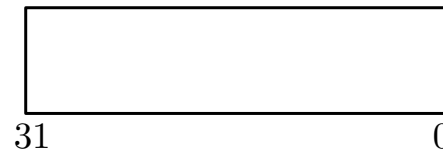
Cijeli brojevi bez predznaka (unsigned integer) na IA-32:



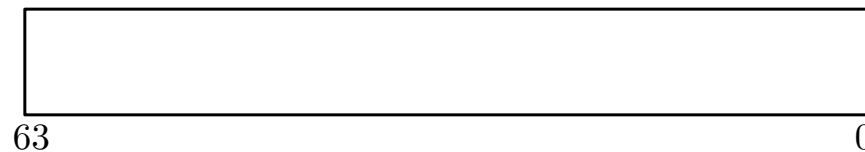
byte unsigned integer



word unsigned integer



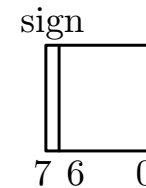
doubleword unsigned integer



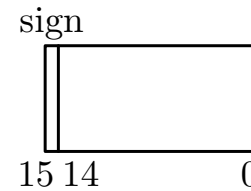
quadword unsigned integer

# Numerički tipovi podataka na IA-32 (nastavak)

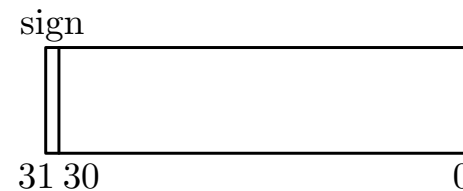
Cijeli brojevi s predznakom (signed integer) na IA-32:



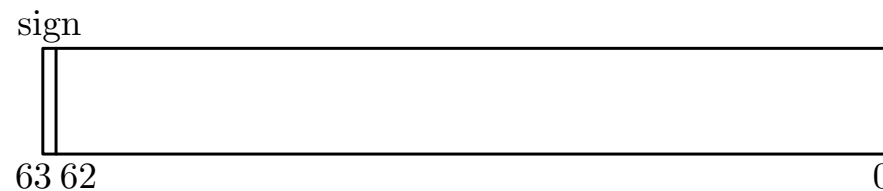
byte signed integer



word signed integer



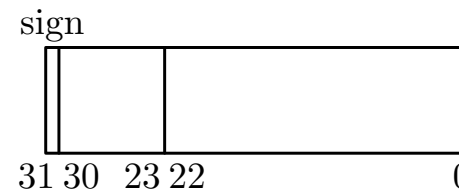
doubleword signed integer



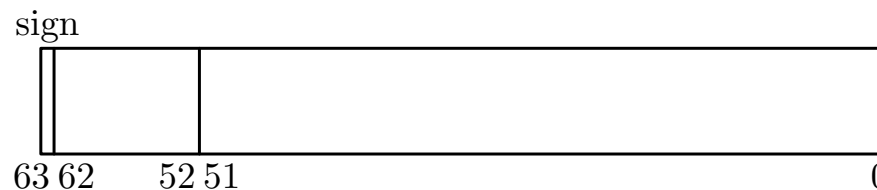
quadword signed integer

# Numerički tipovi podataka na IA-32 (nastavak)

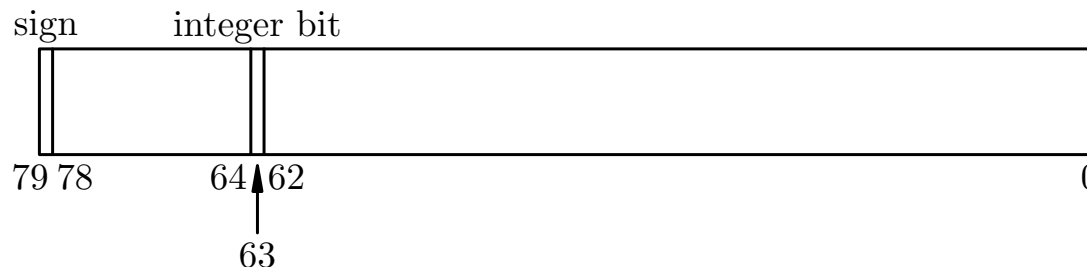
Realni brojevi u tzv. “floating-point” prikazu (v. kasnije), ne samo na IA-32, već općenito, po IEEE standardu:



single precision floating point



double precision floating point



double extended precision floating point

Skraćeni nazivi za ove tipove su: **single**, **double** i **extended**.

# Prikaz cijelih brojeva u računalu

# Sadržaj

- Cijeli brojevi — prikaz i aritmetika:
  - Prikaz brojeva bez predznaka.
  - Sustav ostataka, prsten ostataka modulo  $2^n$ .
  - Modularna aritmetika cijelih brojeva.
  - Aritmetika adresa — “obična” aritmetika.
  - Dijeljenje cijelih brojeva — Euklidov teorem, cjelobrojni kvocijent i ostatak.
  - Prikaz brojeva s predznakom — sustav ostataka.
  - Prikaz negativnih brojeva — komplementiraj i dodaj 1.
  - Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom.
  - Tipične pogreške u korištenju cijelih brojeva.

# Uvod u prikaz cijelih brojeva

Prvo i **osnovno** što moramo znati je **broj bitova** predviđenih za **prikaz cijelih brojeva** (bez predznaka ili s njim).

Pretpostavimo da imamo  $n$  bitova na raspolaganju za **prikaz**.  
Već smo vidjeli da su tipične vrijednosti za  $n$

8, 16, **32**, 64, 128.

Danas se (još uvijek) najčešće koristi  $n = 32$ .

U  $n$  bitova možemo prikazati točno  $2^n$  **različitih podataka**, jer svaki bit može biti jednak 0 ili 1, i to nezavisno od ostalih.

Dakle, **skup brojeva** koje možemo **prikazati** u tih  $n$  bitova ima (najviše)  $2^n$  **elemenata**. Običaj je da se iskoriste **sve** mogućnosti za prikaz, pa taj **skup ima točno  $2^n$  elemenata**.

# Cijeli brojevi bez predznaka

Cijeli brojevi bez predznaka modeliraju skup  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Standardni dogovor: u računalu se prikazuje

- najveći mogući početni komad tog skupa  $\mathbb{N}_0$ .

Ako imamo  $n$  bitova na raspolaganju za prikaz, onda skup svih prikazivih brojeva ima  $2^n$  elemenata, pa je on jednak

$$\mathbb{Z}_{2^n} = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 2, 2^n - 1\}.$$

Dakle, najveći prikazivi cijeli broj bez predznaka je

$$2^n - 1.$$

Veće brojeve ne možemo prikazati koristeći samo  $n$  bitova.



# Cijeli brojevi bez predznaka (nastavak)

Tipične vrijednosti za najveći prikazivi cijeli broj bez predznaka su:

$n$	$2^n - 1$
8	255
16	65 535
32	4 294 967 295
64	18 446 744 073 709 551 615

Kako stvarno izgleda prikaz brojeva u tih  $n$  bitova?

Prikaz pojedinog (prikazivog) broja je

- doslovna “kopija” prikaza tog broja u pozicionom zapisu u bazi 2, uz dopunu nulama “sprijeda” do  $n$  bitova.

Što to znači?

# Prikaz cijelih brojeva bez predznaka

Neka je  $B \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$  neki prikazivi broj i neka je

$$B = (b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0)_2 = b_k \cdot 2^k + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0,$$

pozicioni zapis tog broja  $B$  u bazi 2, gdje su  $b_i \in \{0, 1\}$  njegove binarne znamenke (bitovi). Uočiti:  $B$  prikaziv  $\iff k \leq n - 1$ .

I točno tako se spremaju bitovi u prikazu, samo treba vodeće bitove dopuniti nulama, od indeksa  $k + 1$  do  $n - 1$ , ako takvih ima, tj. ako je  $k < n - 1$ .

Dakle, prikaz broja  $B$  kao cijelog broja bez predznaka ima oblik

$$\text{bit}_i = \begin{cases} b_i, & \text{za } i = 0, \dots, k, \\ 0, & \text{za } i = k + 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

## Prikaz cijelih brojeva bez predznaka — primjer

**Primjer.** Uzmimo da je  $n = 8$  (budimo skromni) i pogledajmo zapis broja 123. Za početak, vrijedi

$$123 \leq 255 = 2^8 - 1,$$

pa je 123 prikaziv. Nadalje, njegov prošireni binarni prikaz je

$$\begin{aligned} 123 &= 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 \\ &= 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 \\ &\quad + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

**Binarne** znamenke broja 123 su

$$\begin{aligned} b_7 &= 0, & b_6 &= 1, & b_5 &= 1, & b_4 &= 1, \\ b_3 &= 1, & b_2 &= 0, & b_1 &= 1, & b_0 &= 1. \end{aligned}$$

# Prikaz cijelih brojeva bez predznaka — primjer

Dakle, broj 123, kao cijeli broj bez predznaka, ima prikaz

7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1

Katkad je zgodno imati i skraćenu oznaku

$$[ \text{bit}_{n-1} \text{ bit}_{n-2} \text{ bit}_{n-3} \dots \text{bit}_1 \text{ bit}_0 ]$$

za zapis vrijednosti svih  $n$  bitova u prikazu broja.

Broj 123, kao cijeli broj bez predznaka, onda ima prikaz

$$123 \longleftrightarrow [ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 ] .$$

**Napomena.** Opći algoritam za nalaženje binarnih znamenki broja napraviti ćemo kasnije.

# Aritmetika cijelih brojeva bez predznaka

**Aritmetika** cijelih brojeva bez predznaka s  $n$  bitova za prikaz brojeva je tzv. **modularna aritmetika**, ili, preciznije

- **aritmetika ostataka modulo  $2^n$** .

To znači da **aritmetičke operacije**  $+$ ,  $-$  i  $*$ , na skupu  $\mathbb{Z}_{2^n}$  cijelih brojeva bez predznaka, daju rezultat koji je

- **jednak ostatku** rezultata pripadne **cjelobrojne** operacije (u skupu  $\mathbb{Z}$ ) pri **dijeljenju** s  $2^n$ .

Drugim riječima, za **prikazive** operande  $A$  i  $B$  vrijedi

$$\text{rezultat } (A \text{ op } B) := (A \text{ op } B) \bmod 2^n,$$

gdje je **op** zbrajanje, oduzimanje ili množenje.

Oznake za pripadne operacije u matematici su  $\oplus_{2^n}$ ,  $\ominus_{2^n}$  i  $\odot_{2^n}$ .

# Aritmetika cijelih brojeva bez predznaka

**Važna napomena.** Ako je “pravi” cjelobrojni rezultat  $A \text{ op } B$  prevelik (neprikaziv), računalo ne javlja nikakvu grešku, već

- postavlja tzv. bit prijenosa (engl. “carry bit”) na 1 u kontrolnom registru.

Što će se dalje dogoditi, ovisi o programu koji se izvršava.

Standardno ponašanje programskih alata ovisi o tome koja vrsta podataka se prikazuje cijelim brojevima bez predznaka.

A tu postoje dvije mogućnosti.

- Ako je riječ o korisničkim podacima, tj. o “brojevima”, prijenos se ignorira, bez ikakve poruke. Normalno se nastavlja rad, s rezultatom po opisanom pravilu.

Zato oprez (v. malo kasnije)!

# Aritmetika adresa

S druge strane, memorijske adrese se, također, prikazuju kao cijeli brojevi bez predznaka — određene veličine.

Na primjer, obični adresni prostor na IA-32 je  $2^{32}$  byte-a, pa se adrese prikazuju kao 32-bitni cijeli brojevi bez predznaka.

- S adresama se isto tako rade aritmetičke operacije,
  - tzv. aritmetika pokazivača ili pointera u C-u, posebno kod obrade nizova (stiže u Prog2).
- Dosta je očito da ova aritmetika nije modularna!
- Tu nema šale, prijenos se ne smije ignorirati i računalo mora javiti grešku (“memory protect violation” ili nešto slično).

Zato brojevi i adrese pripadaju različitim tipovima podataka!

# Modularna aritmetika — opravdanje

Zašto se aritmetika cijelih brojeva realizira na ovaj način,

• kao modularna aritmetika?

Postoje dva vrlo dobra razloga.

• Čisto tehnički, ova realizacija je najlakša i brza.

Ostaci modulo  $2^n$  (uz ignoriranje prijenosa) znače da stalno uzimamo samo najnižih  $n$  bitova rezultata.

Drugi razlog je matematičke prirode.

• U pozadini ove realizacije je klasična algebarska struktura prstena ostataka modulo  $2^n$  (v. Dodatak).

Tu strukturu je korisno detaljnije upoznati, jer bitno olakšava razumijevanje cjelobrojne aritmetike (i one s predznakom).



# Dijeljenje cijelih brojeva

A što je s **dijeljenjem**? To dosad nismo ni spomenuli!

S razlogom! “**Obično**” **dijeljenje** ima smisla tek u strukturi **polja**, poput racionalnih brojeva  $\mathbb{Q}$ , ili realnih brojeva  $\mathbb{R}$ .

Znamo da  $\mathbb{N}_0$  i  $\mathbb{Z}$  **nisu** polja. Isto vrijedi i za  $\mathbb{Z}_{2^n}$ , čim je  $n > 1$ , a slučaj  $n = 1$  je potpuno neinteresantan za praksu, barem što se tiče aritmetike cijelih brojeva (iako je vrlo bitan za logičku algebru).

**Što sad?**

Zamjena za “obično” dijeljenje u **cijelim** brojevima je tzv. **dijeljenje s ostatkom**. Podloga za to je poznati **Euklidov teorem** o dijeljenju s ostatkom u skupu  $\mathbb{Z}$ .

# Dijeljenje cijelih brojeva — Euklidov teorem

Euklidov teorem. Za svaki cijeli broj  $a \in \mathbb{Z}$  i svaki prirodni broj  $b \in \mathbb{N}$ , postoje jedinstveni brojevi  $q, r \in \mathbb{Z}$ , takvi da je

$$a = q \cdot b + r \quad \text{i} \quad 0 \leq r < b.$$

Broj  $q$  je cjelobrojni kvocijent, a  $r$  ostatak pri dijeljenju  $a$  s  $b$ .

Ograničenje  $0 \leq r < b$  znači da za ostatak  $r$  vrijedi

$$r \in \mathbb{Z}_b := \{0, 1, 2, \dots, b-1\},$$

pa skup  $\mathbb{Z}_b$  zovemo standardni sustav ostataka modulo  $b$ . ■

Zvuči poznato: ako uzmemo divizor  $b = 2^n$ , dobivamo skup  $\mathbb{Z}_{2^n}$  svih prikazivih cijelih brojeva bez predznaka u računalu.

# Dijeljenje cijelih brojeva — dvije operacije

Uočite da Euklidov teorem, odnosno, **cjelobrojno dijeljenje s ostatkom** daje dva rezultata:

- **cjelobrojni kvocijent i ostatak.**

Zgodno je odmah uvesti i oznake za **obje** operacije. Nažalost, **nema** standardne matematičke oznake za **cjelobrojni kvocijent**. Da izbjegnemo mogućnost bilo kakve zabune,

- za **cjelobrojni kvocijent** koristimo oznaku **div**, po ugledu na Pascal (oznaka **/** u C-u),

$$a \text{ div } b := q \in \mathbb{Z},$$

- a za **ostatak** postoji standardna oznaka **mod**, koju smo već koristili (oznaka **%** u C-u),

$$a \text{ mod } b := r \in \mathbb{Z}_b.$$

## Veza cjelobrojnog i običnog dijeljenja

Zahtjev da je  $0 \leq r < b$ , tj. da **ostatak**  $r$  pripada skupu  $\mathbb{Z}_b$ , daje jednostavnu vezu **cjelobrojnog** i **običnog** dijeljenja (onog u **racionalnim** brojevima).

Lako se vidi da vrijedi

$$a \text{ div } b = q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

Dakle, **cjelobrojni** kvocijent je “**najveće cijelo**” od običnog **racionalnog** kvocijenta.

Ova veza je **specifična** za izbor  $r \in \mathbb{Z}_b$  i

🔴 **ne vrijedi** za **drugačije** sustave ostataka, a takve sustave možemo izabrati, kao što ćemo vidjeti.

# Dijeljenje cijelih brojeva bez predznaka

Sve što smo dosad rekli o cjelobrojnom dijeljenju s ostatkom (zasad) vrijedi

- samo za cijele brojeve, ili, preciznije, na  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

Taj skup je “domena” za Euklidov teorem. Stoga su operacije **div** i **mod** definirane baš na toj domeni.

A što je s cjelobrojnim dijeljenjem s ostatkom u računalu, tj. na skupu  $\mathbb{Z}_{2^n}$  prikazivih cijelih brojeva bez predznaka?

**Odgovor:** Potpuno isto kao da smo u cijelim brojevima.

Drugim riječima, dijeljenje s ostatkom cijelih brojeva bez predznaka je naprosto

- restrikcija “cjelobrojnih” operacija **div** i **mod**.

## Cijeli brojevi bez predznaka — sažetak

Ako imamo  $n$  bitova za prikaz brojeva, onda je skup svih prikazivih cijelih brojeva bez predznaka jednak

$$\mathbb{Z}_{2^n} = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 2, 2^n - 1\}.$$

Prikaz broja  $B \in \mathbb{Z}_{2^n}$  dobiva se iz “proširenog” zapisa tog broja u bazi 2, s točno  $n$  binarnih znamenki.

Aritmetika cijelih brojeva bez predznaka je modularna aritmetika u prstenu  $(\mathbb{Z}_{2^n}, \oplus_{2^n}, \odot_{2^n})$ :

- operacije  $+$ ,  $-$  i  $\cdot$  daju cjelobrojni rezultat modulo  $2^n$ ,
- operacije cjelobrojnog dijeljenja s ostatkom  $\text{div}$  i  $\text{mod}$  daju iste rezultate kao da dijelimo u  $\mathbb{Z}$  (ili  $\mathbb{N}_0$ ).

# Cijeli brojevi u C-u — sažetak

U programskom jeziku C:

- cijelim brojevima **bez predznaka** odgovara tip koji se zove `unsigned int`, ili, skraćeno, `unsigned`,
- cijelim brojevima **s predznakom** odgovara tip koji se zove `int`.

Ovi tipovi postoje u nekoliko raznih **veličina**:

- standardna, `short`, `long`, a katkad i druge (`long long`).

Razlike su u **broju** bitova  $n$  predviđenih za prikaz.

- Zapis konstanti (vrijednost, navođenje tipa) — kasnije.
- Zapis operacija  $+$ ,  $-$  i  $\cdot$  znakovima  $+$ ,  $-$  i  $*$ .
- Zapis operacija `div` i `mod` znakovima  $/$  i  $\%$ .

# Cijeli brojevi bez predznaka u C-u — primjer 1

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    unsigned short i = 65535;  /* int ne pisem */

    printf("%d\n", i / 10);    /* 6553 */

    i = i + 3;
    printf("%d\n", i);        /* 2, a ne 65538 */

    return 0;
}
```

`USHRT_MAX = 65535` u zaglavlju `limits.h`. Ovdje je  $n = 16$ .



## Cijeli brojevi bez predznaka u C-u — primjer 2

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    unsigned short i = 2, j = 4;

    i = i - j;
    printf("%d\n", i); /* 65534, a ne -2 */

    return 0;
}
```

`%d` — piše vrijednost od `i` uz pretvorbu u tip `int`.

`%hu` — piše vrijednost od `i` baš kao `unsigned short`.

Ovdje nema razlike, ali da pišemo `i - j`, bilo bi razlike.

# Cijeli brojevi u C-u — dodjeljivanje i čitanje

**Napomena.** Ista “modularna” priča vrijedi i

- kod dodjeljivanja i/ili čitanja vrijednosti cijelih brojeva!

Pretvorba iz niza znakova (dekadske znamenke u dekadskom zapisu broja) u binarni zapis (interni prikaz broja) ide

- onim aritmetičkim pravilima koja odgovaraju tipu broja, po “Hornerovom” algoritmu u bazi 10 (v. kasnije),
- a ta aritmetika je modularna.

Primjeri C programa:

- za dodjeljivanje i čitanje brojeva — malo kasnije,
- za prikaz brojeva — kasnije.

# Prikaz cijelih brojeva s predznakom

## Cijeli brojevi s predznakom

Cijeli brojevi s predznakom modeliraju skup  $\mathbb{Z}$  cijelih brojeva.

Ako imamo  $n$  bitova na raspolaganju za prikaz, onda skup svih prikazivih brojeva ima (najviše)  $2^n$  elemenata.

Među prikazivim brojevima moraju biti i (neki) negativni brojevi. Zgodno bi bilo da ih je podjednako mnogo kao i pozitivnih (odnosno, nenegativnih) brojeva.

**Standardni dogovor:** u računalu se prikazuje

- najveći mogući podskup uzastopnih brojeva iz  $\mathbb{Z}$  koji je “skoro” simetričan oko 0.

**Napomena.** “Prava” simetrija oko nule dala bi neparan broj prikazivih brojeva — što nema smisla.

## Cijeli brojevi s predznakom (nastavak)

Dakle, prikazivih negativnih brojeva ima podjednako mnogo kao i nenegativnih.

Ako želimo da točno polovina tih brojeva bude negativna, onda njih mora biti  $2^n/2 = 2^{n-1}$ . Nenegativnih brojeva je, naravno, isto toliko.

To znači da je skup svih prikazivih cijelih brojeva s predznakom jednak

$$\mathbb{Z}_{2^n}^- = \{ -2^{n-1}, -2^{n-1} + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2, 2^{n-1} - 1 \}.$$

Brojeve izvan tog skupa ne možemo prikazati (kao cijele brojeve s predznakom) koristeći samo  $n$  bitova.

## Cijeli brojevi s predznakom (nastavak)

Najmanji i najveći prikazivi cijeli broj s predznakom su, redom:

$$-2^{n-1}, \quad 2^{n-1} - 1.$$

Tipične vrijednosti za ta dva “granična” broja su:

$n$	$-2^{n-1}$	$2^{n-1} - 1$
8	-128	127
16	-32 768	32 767
32	-2 147 483 648	2 147 483 647

Uočite da raspon prikazivih cijelih brojeva s predznakom nije jako velik, čak i za  $n = 32$  (što je standard). **Oprez!**

Zato se danas sve više koristi  $n = 64$  (želja za  $n = 128$ ),

$$2^{63} - 1 = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,807.$$

# Prikaz cijelih brojeva s predznakom

Kako stvarno izgleda prikaz brojeva u tih  $n$  bitova?

Prikaz pojedinog (prikazivog) broja potpuno je određen s dva zahtjeva:

- nenegativni brojevi imaju isti prikaz kao u cijelim brojevima bez predznaka (dovoljno je to tražiti samo za jedan broj, na primjer, za nulu),
- aritmetika za te prikaze mora (kao i ranije, za brojeve bez predznaka) dati “dobru” algebarsku strukturu na cijelim brojevima s predznakom, tj. na skupu  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$ .

Prvi zahtjev je dosta jasan, ali što znači drugi?

- Zatvorenost na operacije zbrajanja i množenja, dobra svojstva tih operacija!

# Aritmetika cijelih brojeva s predznakom

Dakle, **aritmetika** za cijele brojeve s predznakom **mora** i dalje biti **ista**, tj.

● **modularna aritmetika modulo  $2^n$** ,

samo je **interpretacija** sustava ostataka **drugačija**.

Skup svih prikazivih cijelih brojeva **s predznakom**

$$\mathbb{Z}_{2^n}^- = \{ -2^{n-1}, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1 \}$$

je, također, **potpuni** sustav ostataka modulo  $2^n$ .

Na tom skupu opet možemo definirati operacije **zbrajanja** i **množenja** (bez posebnih oznaka) preko odgovarajućih **ostataka** cjelobrojnih operacija  $+$  i  $\cdot$ . Kao i prije, dobivamo strukturu **prstena s jedinicom**, ali sad na skupu  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$ .



# Prikaz cijelih brojeva s predznakom (nastavak)

A sad je lako dobiti prikaz svih negativnih brojeva.

Usporedimo skupove prikazivih brojeva bez predznaka i s predznakom, tj. pripadne sustave ostataka modulo  $2^n$ ,

$$\mathbb{Z}_{2^n} = \{ 0, 1, \dots, 2^n - 1 \},$$

$$\mathbb{Z}_{2^n}^- = \{ -2^{n-1}, \dots, -1, 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1 \}.$$

Pravilo za prikaz je vrlo jednostavno:

- iste prikaze imaju oni brojevi (iz ta dva skupa) koji imaju isti “pravi” ostatak modulo  $2^n$ .

Zaključak: za  $B = 1, \dots, 2^{n-1}$ ,

- prikaz negativnog broja  $-B$  (s predznakom)
- jednak je prikazu broja  $2^n - B$  (bez predznaka). ■

## Primjer — prikaz cijelih brojeva za $n = 3$

Primjer. Neka je  $n = 3$ , tj. imamo samo 3 bita za prikaz. Prikazivih brojeva ima  $2^3 = 8$ . Prikazi cijelih brojeva bez predznaka iz  $\mathbb{Z}_8$  i cijelih brojeva s predznakom iz  $\mathbb{Z}_8^-$  su:

$B \in \mathbb{Z}_8$	$B \in \mathbb{Z}_8^-$	prikaz
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011
4	-4	100
5	-3	101
6	-2	110
7	-1	111

# Prikaz cijelih brojeva s predznakom — primjeri

Primjer. Prikaz broja  $-2^{n-1}$  dobivamo tako da

- uzmemo  $B = 2^{n-1}$  (koji sam nije prikaziv s predznakom)
- i pogledamo prikaz broja  $2^n - B$  bez predznaka:

$$-2^{n-1} \iff 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} = [1\ 0\ 0 \dots 0\ 0].$$

Primjer. Broj  $-1$  ima prikaz ( $B = 1$ )

$$-1 \iff 2^n - 1 = [1\ 1\ 1 \dots 1\ 1].$$

# Prikaz cijelih brojeva s predznakom — primjeri

**Primjer.** Kad **najvećem** prikazivom broju  $s$  predznakom, a to je  $2^{n-1} - 1$ , dodamo  $1$ , rezultat je

● **najmanji** prikazivi broj  $s$  predznakom, jer je

$$\begin{aligned}(2^{n-1} - 1) + 1 &= ((2^{n-1} - 1) + 1) \bmod 2^n \\ &= 2^{n-1} \bmod 2^n = -2^{n-1} \in \mathbb{Z}_{2^n}^-.\end{aligned}$$

Naravno, **isti** rezultat izlazi i običnim binarnim “**zbrajanjem prikaza**”

$$[0\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 1] + [0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 1] = [1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0].$$

Uočite da **nema** prijenosa.

## Prikaz cijelih brojeva s predznakom — primjeri

Primjer. Analogno, zbrajanju  $(-1) + 1 = 0$  odgovara binarno “zbrajanje prikaza”

$$[1\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 1] + [0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 1] = 1 [0\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0].$$

Ovdje imamo prijenos, ali se on “modularno” ignorira.

# Prikaz cijelih brojeva s predznakom — komentar

Dakle, prikaz negativnih brojeva je posljedica

- one iste modularne aritmetike,

koja vrijedi i za cijele brojeve bez predznaka.

Tehnički gledano, tri osnovne operacije  $+$ ,  $-$  i  $\cdot$  na cijelim brojevima, u računalu se izvršavaju

- potpuno jednako (istim “elektroničkim krugovima”) za cijele brojeve s predznakom i bez njega,

Važni su samo bitovi u prikazu, a ne i njihova interpretacija!

Za cjelobrojno dijeljenje to ne vrijedi (v. malo kasnije).

# Prikaz suprotnog broja preko komplementa

Za zadani broj  $B > 0$ , kad tražimo prikaz broja  $-B$ ,

- broj  $2^n - B$  nije baš lako izračunati, čim je broj bitova  $n$  iole veći.

Srećom, ima i lakši način! Prikaz broja  $-B$  možemo naći i tehnikom “dvojnog komplementa”:

- prikaz zadanog broja  $B$  treba komplementirati, tj. pretvoriti nule u jedinice i obratno (tj.  $0 \leftrightarrow 1$ ),
- a zatim, tom komplementu treba dodati 1 (modulo  $2^n$ ).

Kratko opravdanje: ako je  $\bar{B}$  broj (bez predznaka) kojem odgovara komplementirani prikaz broja  $B$ , onda je (očito)

$$B + \bar{B} = [1\ 1\ 1\ \dots\ 1\ 1] = 2^n - 1.$$

# Prikaz suprotnog broja preko komplementa

Prebacimo 1 s desne na lijevu stranu

$$B + \bar{B} + 1 = 2^n,$$

i zapišimo ovu relaciju “modularnim zbrajanjem”  $\oplus_{2^n}$  u  $\mathbb{Z}_{2^n}$

$$B \oplus_{2^n} (\bar{B} \oplus_{2^n} 1) = 0.$$

Dakle, **jedinstveni** suprotni element (inverz obzirom na zbrajanje) elementa  $B \in \mathbb{Z}_{2^n}$  jednak je  $\bar{B} \oplus_{2^n} 1$ .

Drugim riječima, **suprotni** broj dobivamo tako da

- **komplementiramo** broj (odnosno, njegov prikaz) i
- **dodamo 1** modulo  $2^n$ .

**Potpuno isto** “pravilo” vrijedi i za **negativne** brojeve  $B$ ! ■



## Prikaz cijelih brojeva s predznakom — primjer

**Primjer.** Uzmimo da je  $n = 8$  (budimo skromni) i pogledajmo zapis broja  $-120$ . Za početak, vrijedi

$$-2^7 = -128 \leq -120 \leq 127 = 2^7 - 1,$$

pa je  $-120$  prikaziv. Nadalje, binarni prikaz broja  $B = 120$  je

$$\begin{aligned} 120 &= 64 + 32 + 16 + 8 \\ &= 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 \\ &\quad + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

Dakle, broj  $B = 120$ , kao cijeli broj bez predznaka, ima prikaz

$$120 \longleftrightarrow [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

## Prikaz cijelih brojeva s predznakom — primjer

U zadanih  $n = 8$  bitova, broj  $B = 120$  (kao cijeli broj  $s$  predznakom, ili bez njega) ima prikaz

7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0

Komplementiranjem prikaza (bit po bit) dobivamo

7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1

Dodamo 1 (modulo  $2^8$ ). Prikaz broja  $-B = -120$  je

7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0

## Prikaz cijelih brojeva s predznakom — primjer

Istu stvar možemo dobiti i tako da nađemo prikaz broja

$$2^8 - B = 256 - 120 = 136,$$

kao cijelog broja **bez predznaka**. Imamo redom

$$\begin{aligned} 136 &= 128 + 8 \\ &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 \\ &\quad + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

Za  $n = 8$ , broj  $-120$ , kao cijeli broj **s predznakom**, ima isti prikaz kao i  $136$ , **bez predznaka**

$$-120 \longleftrightarrow 136 \longleftrightarrow [1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0].$$

# Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

## Dijeljenje cijelih brojeva — izbor ostatka

Standardno ograničenje na **ostatak**  $0 \leq r < b$ , tj.  $r \in \mathbb{Z}_b$ , prirodno odgovara cijelim brojevima **bez predznaka**.

Zato, u većini programskih jezika (uključivo i C) **vrijedi** da

- stvar radi očekivano, tj. prema **standardnom** Euklidovom teoremu, **samo na skupu**  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ .

Dakle, za **nenegativne** brojeve **s predznakom** dobivamo očekivane (i korektne) rezultate u **cjelobrojnom** dijeljenju.

Međutim, kod brojeva **s predznakom** imamo i **negativne** brojeve, pa (možda) ima smisla dozvoliti

- da i ostaci budu **negativni**, u nekim slučajevima.

Odluka, tj. izbor ostataka — ovisi o **primjeni** i željenim **svojstvima** rezultata!

## Dijeljenje cijelih brojeva — izbor ostatka

Pripadni “Euklidov teorem” smije imati i **kompliciraniju** formulaciju, ako je to **korisno** u praksi.

- Pitanje je samo je li izbor ostataka **propisan** ili ne!!!

Nažalost, za **negativne** operande, ponašanje dijeljenja

- **ne mora biti precizno definirano!**

Na primjer, stari **C90** standard (knjiga **KR2**) kaže:

- ako je barem jedan od dva operanda **negativan**, rezultat **ovisi o implementaciji**.

Dakle, **nije predvidiv** — isti program može davati **različite** rezultate, ovisno o računalu i izboru **C** kompilera.

Zato — **čitajte upute** ili, naprosto, **probajte!**

Srećom, novi **C99** standard **precizno propisuje** izbor ostataka.

# Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

## Eksperiment:

- test-program `divmod.c` (v. sljedeća stranica),
- Intel C++ compiler, gcc compiler ([Code::Blocks](#)).

Rezultati  $q = a \operatorname{div} b$  i  $r = a \operatorname{mod} b$  za  $a = \pm 5$ ,  $b = \pm 3$ :

$a$	$b$	$q$	$r$
5	3	1	2
-5	3	-1	-2
5	-3	-1	2
-5	-3	1	-2

Operacije `div` i `mod` interpretiramo na  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ .

## *Test-program* divmod.c

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    char s[] =
        " a = %2d, b = %2d, q = %2d, r = %2d\n";
    int a, b;

    a =  5; b =  3; printf(s, a, b, a/b, a%b);
    a = -5; b =  3; printf(s, a, b, a/b, a%b);
    a =  5; b = -3; printf(s, a, b, a/b, a%b);
    a = -5; b = -3; printf(s, a, b, a/b, a%b);

    return 0;
}
```



# Veza cjelobrojnog i običnog dijeljenja (*standard*)

Ključ za interpretaciju:

- **kvocijent** se uvijek “zaokružuje” prema nuli,

$$q = \text{sign} \left( \frac{a}{b} \right) \cdot \left\lfloor \left| \frac{a}{b} \right| \right\rfloor,$$

- **ostatak** ima isti predznak kao i  $a$ .

$$r = \text{sign}(a) \cdot (|a| \bmod |b|).$$

Za ostatak  $r$  ovdje vrijedi:

- ako je  $a \geq 0$ , onda je  $r \in \mathbb{Z}_b$ , tj.  $0 \leq r < |b|$ ,
- ako je  $a < 0$ , onda je  $r \in -\mathbb{Z}_b$ , tj.  $-|b| < r \leq 0$ .

Ovo je modificirani “**Euklidov** teorem” za cijele brojeve u **C**-u!

## Dijeljenje cijelih brojeva (*standard*)

Novi C99 standard propisuje ovakav izbor ostataka, tj.

- ovakvo ponašanje cjelobrojnog dijeljenja za cijele brojeve s predznakom.

Zato zaboravite raniju definiciju (“pravi” Euklidov teorem), iako se “novi” mod ponaša drugačije nego u matematici.

Prednosti ovakve definicije operacija  $\text{div}$  i  $\text{mod}$  na skupu  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ :

- bez obzira na predznake od  $a$  i  $b$ , dobivamo
- iste apsolutne vrijednosti kvocijenta  $q$  i ostatka  $r$ ,

tj. samo predznaci od  $q$  i  $r$  ovise o predznacima od  $a$  i  $b$ .

Ovo je i najčešća realizacija cjelobrojnog dijeljenja u praksi (misli se i na ostale programske jezike).

## Cijeli brojevi s predznakom — sažetak

Ako imamo  $n$  bitova za prikaz brojeva, onda je skup svih prikazivih cijelih brojeva s predznakom jednak

$$\mathbb{Z}_{2^n}^- = \{ -2^{n-1}, -2^{n-1} + 1, \dots, -2, -1, \\ 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2, 2^{n-1} - 1 \}.$$

Za prikaz broja  $B \in \mathbb{Z}_{2^n}^-$  vrijedi:

- nenegativni brojevi  $B = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$  imaju isti prikaz kao i bez predznaka,
- negativni brojevi  $B = -1, \dots, -2^{n-1}$  imaju isti prikaz kao i brojevi  $2^n + B$  bez predznaka.

## Cijeli brojevi s predznakom — sažetak

Osim toga, prikaz suprotnog broja  $-B$  dobivamo tako da

- komplementiramo prikaz samog broja  $B$  i
- dodamo 1 modulo  $2^n$ .

Aritmetika cijelih brojeva s predznakom je modularna aritmetika modulo  $2^n$  na sustavu ostataka  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$ .

- To vrijedi za operacije  $+$ ,  $-$  i  $\cdot$ .

Operacije cjelobrojnog dijeljenja s ostatkom  $\text{div}$  i  $\text{mod}$  daju iste rezultate kao da dijelimo u  $\mathbb{Z}$ ,

- ali, za svaki slučaj, treba provjeriti kako se dobiva proširenje ovih operacija s  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$  na  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ,
- tj. radi li compiler prema C99 standardu.

# Cijeli brojevi u C-u — sažetak

U programskom jeziku C:

- cijelim brojevima s predznakom odgovara tip koji se zove `int`.

Ovaj tip postoji u nekoliko raznih **veličina**, a razlike su u **broju** bitova  $n$  predviđenih za prikaz.

Na 32-bitnim arhitekturama računala imamo sljedeće tipove:

- standardni `int` ( $n = 32$ ),
- `short` ( $n = 16$ ),
- `long` ( $n = 32$ ), tj. **isto** kao standardni `int`,
- a katkad i druge, poput `long long` ( $n = 64$ ).

Zapis konstanti (vrijednost, navođenje tipa) — kasnije.

# Cijeli brojevi s predznakom u C-u — primjer 1

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    short int i = 32766; /* n = 16 za short */

    i += 1;
    printf("%d\n", i); /* 32767 */
    i += 1;
    printf("%d\n", i); /* -32768, a ne 32768 */

    return 0;
}
```

`SHRT_MAX = 32767` u zaglavlju `limits.h`. Ovdje je  $n = 16$ .

# Cijeli brojevi — dodjeljivanje

Primjer. Modularna aritmetika kod dodjeljivanja.

---

```
#include <stdio.h>
```

```
int main(void) {  
    int broj;
```

```
    broj = 5;           printf(" broj = %d\n", broj);
```

```
    broj = 2000000000; printf(" broj = %d\n", broj);
```

```
    broj = 4000000000; printf(" broj = %d\n", broj);
```

```
    broj = 8000000000; printf(" broj = %d\n", broj);
```

```
    return 0;
```

```
}
```

---

# Cijeli brojevi — dodjeljivanje (nastavak)

U tipu `int`, broj bitova za prikaz brojeva je  $n = 32$ .

Izlaz programa je:

---

```
broj = 5
```

```
broj = 2000000000
```

```
broj = -294967296
```

```
broj = -589934592
```

---



## Cijeli brojevi — čitanje

Primjer. Modularna aritmetika kod čitanja.

---

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    int broj;

    scanf("%d", &broj);
    printf(" učitani broj = %d\n", broj);

    return 0;
}
```

---

Za ulaz 4000000000,  
izlaz programa je: učitani broj = -294967296.

# Aritmetika cijelih brojeva: klasične greške

## Cijeli brojevi — klasične greške

**Primjer.** Računanje  $n!$  u cjelobrojnoj aritmetici.

Za prirodni broj  $n \in \mathbb{N}$ , funkciju **faktorijela** definiramo na sljedeći način:

$$1! = 1,$$

$$n! = n \cdot (n - 1)!, \quad \text{za } n \geq 2.$$

Napišimo **C** program koji računa broj  $50!$  u **cjelobrojnoj** aritmetici (tip **int**).

Očito je  $n! =$  produkt svih prirodnih brojeva od  $1$  do  $n$ ,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n,$$

pa koristimo **množenje** u **petlji**, a ne rekurziju.

## Cijeli brojevi — klasične greške (nastavak)

```
#include <stdio.h>

int main(void) {
    int i, f50 = 1;    /* n = 32 za int */

    for (i = 2; i <= 50; ++i)
        f50 *= i;

    printf(" f50 = %d\n", f50);    /* f50 = 0 */

    return 0;
}
```

Izlaz programa je: `f50 = 0`. Zašto?

## Cijeli brojevi — klasične greške (nastavak)

Za početak,  $50!$  je **ogroman** broj. Točna vrijednost je

$$50! = 30414\ 09320\ 17133\ 78043\ 61260\ 81660 \\ 64768\ 84437\ 76415\ 68960\ 51200\ 00000\ 00000,$$

i ima **65** dekadskih znamenki. Dakle, sigurno **nije prikaziv** u cjelobrojnoj aritmetici.

Granice za tip `int` ( $n = 32$  bita) iz zaglavlja `limits.h` su

$$\text{INT\_MAX} = 2147483647, \quad \text{INT\_MIN} = (-\text{INT\_MAX} - 1).$$

Objasnimo još zašto je  $f50 = 0$  u **našem programu**.

Cjelobrojna aritmetika u kojoj računamo je **modularna** aritmetika — modulo  $2^{32}$ .

## Cijeli brojevi — klasične greške (nastavak)

To znači da naš program kaže da je

$$50! = 0 \pmod{2^{32}},$$

ili da  $2^{32}$  dijeli  $50!$ .

**Zadatak.** Nađite **najveću** potenciju broja  $2$  koja dijeli  $50!$ , ili, općenito,  $n!$ . U traženoj potenciji  $2^m$ , **eksponent**  $m$  je

$$m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^5} \right\rfloor + \dots$$

Za  $n = 50$  imamo  $m = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$ .

**Zadatak.** Nađite **najmanji** broj  $n$  za koji je  $n! = 0$  u cjelobrojnoj aritmetici s  $\ell$  bitova za prikaz brojeva.

## Tablica $n!$ za $\ell = 16$ i $\ell = 32$ bita

Usporedimo rezultate za  $n!$  dobivene u **cjelobrojnoj** aritmetici s  $\ell = 16$  bitova (tip **short int**) i  $\ell = 32$  bita (tip **int**), s (ispravnim) rezultatom dobivenim u **realnoj** aritmetici.

$n!$	$\ell = 16$	$\ell = 32$	realna aritmetika
7!	5040	5040	5040
8!	-25216	40320	40320
9!	-30336	362880	362880
10!	24320	3628800	3628800
11!	5376	39916800	39916800
12!	-1024	479001600	479001600

## Tablica $n!$ za $\ell = 16$ i $\ell = 32$ bita (nastavak)

$n!$	$\ell = 16$	$\ell = 32$	realna aritmetika
13!	-13312	1932053504	6227020800
14!	10240	1278945280	87178291200
15!	22528	2004310016	1307674368000
16!	-32768	2004189184	20922789888000
17!	-32768	-288522240	355687428096000
18!	0	-898433024	6402373705728000
19!	0	109641728	121645100408832000
20!	0	-2102132736	2432902008176640000



# Dodatak — o prikazu cijelih brojeva

# Sadržaj

- Cijeli brojevi — prikaz i aritmetika:
  - Prikaz cijelih brojeva bez predznaka (precizno).
  - Modularna aritmetika, aritmetika adresa (primjer).
  - Modularna aritmetika, prsten ostataka modulo  $2^n$ .
  - Dijeljenje cijelih brojeva — Euklidov teorem, cjelobrojni kvocijent i ostatak.
  - Dijeljenje s ostatkom u prstenu  $\mathbb{Z}_b$ .
  - Prikaz brojeva s predznakom — sustav ostataka.
  - Vodeći bit i predznak.
  - Prikaz suprotnog broja — precizna argumentacija za “komplementiraj i dodaj 1”.
  - Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom — izbor ostataka.

# Prikaz brojeva bez predznaka (precizno)

# Prikaz cijelih brojeva bez predznaka (*precizno*)

Neka je  $B \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$  neki prikazivi broj.

Ako je  $B = 0$ , onda je svih  $n$  bitova u prikazu jednako 0, tj.

$$B = 0 \iff \text{bit}_i = 0, \quad \text{za } i = 0, \dots, n - 1.$$

U protivnom, ako je  $B > 0$ , onda njegov normalizirani pozicioni prikaz u bazi 2 ima oblik:

$$B = b_k \cdot 2^k + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0, \quad b_i \in \{0, 1\}, \quad b_k > 0,$$

gdje su  $b_i$  binarne znamenke (bitovi) broja  $B$ .

Ograničenje  $b_k > 0$  na vodeću binarnu znamenku samo kaže da je prikaz normaliziran, tj. da nema nul-znamenki “sprijeda”.

# Prikaz cijelih brojeva bez predznaka (*precizno*)

Nadalje, znamo da je  $k \leq n - 1$ , jer je  $B$  prikaziv.

Ako pišemo samo **binarne znamenke** (bitove) “u nizu”, pripadni pozicioni zapis broja  $B$  u bazi  $2$  ima oblik

$$B = (b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0)_2.$$

I točno tako se **spremaju bitovi** u prikazu, samo treba **vodeće** bitove dopuniti **nulama**, od indeksa  $k + 1$  do  $n - 1$ , ako takvih ima, tj. ako je  $k < n - 1$ .

Dakle, **prikaz** broja  $B$  kao **cijelog broja bez predznaka** ima oblik

$$\text{bit}_i = \begin{cases} b_i, & \text{za } i = 0, \dots, k, \\ 0, & \text{za } i = k + 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

# Prikaz cijelih brojeva bez predznaka (*precizno*)

U računalu će to biti prikazano kao “cjelina” od  $n$  bitova

$$\text{bit}_{n-1} \text{ bit}_{n-2} \dots \text{bit}_1 \text{ bit}_0.$$

Ako “proširimo” zapis broja  $B$  u bazi 2 do *tačno*  $n$  binarnih znamenki,

$$B = b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0, \quad b_i \in \{0, 1\},$$

s tim da *vodeće znamenke smiju biti 0*, odmah dobivamo prikaz broja  $B$  kao cijelog broja bez predznaka

$$\text{bit}_i = b_i, \quad \text{za } i = 0, \dots, n - 1,$$

s tim da ovo vrijedi i za  $B = 0$ .

## Aritmetika adresa — primjer u Windows XP

Nažalost, u praksi postoje razne “čarolije” na temu **adresa**, koje je **katkad** zgodno **znati**.

**Primjer.** U neko doba, **32-bitni** MS Windows XP imao je “**ograničenje**” adresa na **2 GB**, što je **polovina** od normalnog adresnog prostora na IA-32 (**4 GB**).

- Stvar je išla tako daleko da se XP “**nije dizao**”, ako u računalu imate više od **2 GB** memorije (probao sam).
- Sa zadnjim **SP3**, uz malo truda, **može** ga se instalirati, ali se instalacija prilično “**čudno**” ponaša.

Ako naknadno **dodate** memoriju (onu preko **2 GB**), onda i dalje “**ne vidi**” više od **3.25 GB**!

## Prsten ostataka modulo $2^n$

Naime, skup svih prikazivih cijelih brojeva bez predznaka

$$\mathbb{Z}_{2^n} = \{ 0, 1, 2, \dots, 2^n - 2, 2^n - 1 \}$$

je ujedno i **standardni sustav ostataka** koji dobivamo pri cjelobrojnom dijeljenju s  $2^n$ . Zato se i označava sa  $\mathbb{Z}_{2^n}$ .

Ako na njemu definiramo binarne operacije **zbrajanja**  $\oplus$  i **množenja**  $\odot$  preko ostataka cjelobrojnih operacija  $+$  i  $\cdot$ ,

$$A \oplus B := (A + B) \bmod 2^n,$$

$$A \odot B := (A \cdot B) \bmod 2^n,$$

onda  $(\mathbb{Z}_{2^n}, \oplus, \odot)$  ima algebarsku strukturu **prstena s 1**.

U algebri se operacije  $\oplus$  i  $\odot$  obično označavaju s  $\oplus_{2^n}$  i  $\odot_{2^n}$ .



# Prsten ostataka modulo $2^n$ (nastavak)

Što znači da je  $(\mathbb{Z}_{2^n}, \oplus, \odot)$  prsten s jedinicom? Vrijedi:

- $(\mathbb{Z}_{2^n}, \oplus)$  je komutativna grupa (obzirom na zbrajanje),
- $(\mathbb{Z}_{2^n}, \odot)$  je polugrupa (obzirom na množenje), čak i monoid, jer ima jedinicu  $1 \in \mathbb{Z}_{2^n}$ ,
- operacije  $\oplus$  i  $\odot$  vezane su zakonom distributivnosti, tj.

$$A \odot (B \oplus C) = A \odot B \oplus A \odot C,$$

$$(A \oplus B) \odot C = A \odot C \oplus B \odot C,$$

za svaki izbor  $A, B, C \in \mathbb{Z}_{2^n}$ .

Dodatno,  $(\mathbb{Z}_{2^n}, \oplus, \odot)$  je i komutativni prsten s jedinicom, ali nije polje (za  $n > 1$ ), jer ima djelitelja nule ( $2 \cdot 2^{n-1} = 0$ ).

## Prsten ostataka modulo $2^n$ (nastavak)

Neka je “ $-A$ ” jedinstveni **suprotni element** elementa  $A$  obzirom na zbrajanje. Očito je “ $-0$ ” = 0, a za  $A \neq 0$  vrijedi “ $-A$ ” =  $2^n - A$ , jer je

$$A \oplus “-A” = (A + (2^n - A)) \bmod 2^n = 0.$$

Na kraju, **oduzimanje**  $\ominus$  definiramo kao **zbrajanje** sa **suprotnim** elementom

$$A \ominus B := A + “-B”.$$

I tako smo dobili **tri** osnovne aritmetičke operacije na  $\mathbb{Z}_{2^n}$ . One se **upravo na taj način** realiziraju u **računalu**, za cijele brojeve **bez predznaka**, s  $n$  bitova za prikaz.

U programskim jezicima se ove **tri** operacije pišu znakovima **+**, **-** i **\*** (za  $\cdot$ , odnosno  $\odot$ ).

# Dijeljenje s ostatkom (precizno)

# Dijeljenje cijelih brojeva

A što je s **dijeljenjem**? To dosad nismo ni spomenuli!

S razlogom! “**Obično**” **dijeljenje** ima smisla tek u strukturi **polja**, poput racionalnih brojeva  $\mathbb{Q}$ , ili realnih brojeva  $\mathbb{R}$ .

Znamo da  $\mathbb{N}_0$  i  $\mathbb{Z}$  **nisu** polja. Isto vrijedi i za  $\mathbb{Z}_{2^n}$ , čim je  $n > 1$ , a slučaj  $n = 1$  je potpuno neinteresantan za praksu, barem što se tiče aritmetike cijelih brojeva (iako je vrlo bitan za logičku algebru).

**Što sad?**

Zamjena za “obično” dijeljenje u **cijelim** brojevima je tzv. **dijeljenje s ostatkom**. Podloga za to je poznati **Euklidov teorem** o dijeljenju s ostatkom u skupu  $\mathbb{Z}$ .

# Dijeljenje cijelih brojeva — Euklidov teorem

Euklidov teorem. Za svaki cijeli broj  $a \in \mathbb{Z}$  i svaki prirodni broj  $b \in \mathbb{N}$ , postoje jedinstveni brojevi  $q, r \in \mathbb{Z}$ , takvi da je

$$a = q \cdot b + r \quad \text{i} \quad 0 \leq r < b.$$

Broj  $q$  je cjelobrojni kvocijent, a  $r$  ostatak pri dijeljenju  $a$  s  $b$ .

Ograničenje  $0 \leq r < b$  znači da za ostatak  $r$  vrijedi

$$r \in \mathbb{Z}_b := \{0, 1, 2, \dots, b-1\},$$

pa skup  $\mathbb{Z}_b$  zovemo standardni sustav ostataka modulo  $b$ . ■

Zvuči poznato: ako uzmemo divizor  $b = 2^n$ , dobivamo skup  $\mathbb{Z}_{2^n}$  svih prikazivih cijelih brojeva bez predznaka u računalu.

# Dijeljenje cijelih brojeva — dvije operacije

Uočite da Euklidov teorem, odnosno, cjelobrojno dijeljenje s ostatkom daje dva rezultata:

● cjelobrojni kvocijent i ostatak.

Zgodno je odmah uvesti i oznake za obje ove operacije.

Nažalost, nema standardne matematičke oznake za

● cjelobrojni kvocijent.

Oznaka  $/$  standardno se koristi za operaciju “običnog” dijeljenja u poljima, ili se pišu razlomci. Kad napišem

$$a/b \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b}$$

to odmah asocira na obično dijeljenje (što nije zgodno).

## Oznake za cjelobrojni kvocijent i ostatak

S druge strane, u **nekim programskim jezicima** (C, Fortran) oznaka `/` se koristi i za **cjelobrojno** dijeljenje, ali to vrijedi

- ako i samo ako su **oba** operanda **cijeli** brojevi.

Usput, **isti princip** da **tip rezultata ovisi o tipu oba operanda** (tzv. “operator overloading”) vrijedi i za **tri** ranije operacije s oznakama `+`, `-`, `*`.

Da izbjegnemo mogućnost bilo kakve zabune,

- za **cjelobrojni kvocijent** koristimo oznaku `div`, po ugledu na Pascal (oznaka `/` u C-u),
- a za **ostatak** postoji standardna oznaka `mod`, koju smo već koristili (oznaka `%` u C-u).

# Definicija operacija za cjelobrojno dijeljenje

Precizna definicija ovih operacija izlazi direktno iz Euklidovog teorema.

**Definicija.** Neka su  $a \in \mathbb{Z}$  i  $b \in \mathbb{N}$  bilo koji brojevi, i neka su  $q \in \mathbb{Z}$  (cjelobrojni kvocijent) i  $r \in \mathbb{Z}_b$  (ostatak) **jedinstveni** brojevi za koje vrijedi

$$a = q \cdot b + r.$$

Operacije **div** i **mod** **definiramo** relacijama

$$a \text{ div } b := q \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ mod } b := r \in \mathbb{Z}_b. \quad \blacksquare$$

Ova definicija operacije **mod** točno odgovara onom što smo ranije koristili.



## Dijeljenje cijelih brojeva — mala digresija

Za početak, uočite da su **obje operacije** definirane na skupu  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , a kodomene su im **različite**.

Možda nekog zanima što se zbiva na skupu  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ,

- kad **cjelobrojno dijelimo dva cijela broja** (što, naravno, ima smisla).

O tome malo kasnije, kod cijelih brojeva **s predznakom**.

Odmah jedno **upozorenje**:

- stvar radi **očekivano** (prema Euklidovom teoremu) **samo na skupu**  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ .

Trenutno nam upravo **taj skup** i treba, da dobijemo **cjelobrojno** dijeljenje za cijele brojeve **bez predznaka** (koji modeliraju skup  $\mathbb{N}_0$ ).

## Prsten ostataka modulo $b$ (*dodatak*)

Za bilo koji fiksni **divizor**  $b \geq 2$ , na standardnom sustavu ostataka modulo  $b$ , tj. skupu

$$\mathbb{Z}_b = \{ 0, 1, 2, \dots, b - 1 \}$$

možemo definirati binarne operacije **zbrajanja**  $\oplus_b$  i **množenja**  $\odot_b$ , preko **ostataka** cjelobrojnih operacija  $+$  i  $\cdot$ ,

$$A \oplus_b B := (A + B) \bmod b,$$

$$A \odot_b B := (A \cdot B) \bmod b.$$

Lako se dokazuje da  $(\mathbb{Z}_b, \oplus_b, \odot_b)$  ima algebarsku strukturu **komutativnog prstena s jedinicom** (kao i ranije za  $b = 2^n$ ).

Ta struktura je **polje**, ako i samo ako je  $b$  **prost broj**.

## Dijeljenje s ostatkom u $\mathbb{Z}_b$ (dodatak)

Zašto su rezultati isti? Uzmimo bilo koji fiksni **divizor**  $b \geq 2$ .

Neka su  $A \in \mathbb{Z}_b$  i  $B \in \mathbb{Z}_b$ , uz  $B > 0$ , bilo koji brojevi iz  $\mathbb{Z}_b$  koje “smijemo dijeliti”. Podijelimo ih **cjelobrojno**, i pokažimo da **kvocijent**  $Q := A \text{ div } B$  i **ostatak**  $R := A \text{ mod } B$  moraju, također, **pripadati** skupu  $\mathbb{Z}_b$ .

Znamo da općenito vrijedi  $Q \in \mathbb{Z}$ ,  $R \in \mathbb{Z}_B$  (tj.  $0 \leq R < B$ ) i

$$A = Q \cdot B + R.$$

Zbog  $0 \leq A, B < b$ , odmah vidimo da je

$$0 \leq Q < b \quad \text{i} \quad 0 \leq R < B < b,$$

što dokazuje  $Q, R \in \mathbb{Z}_b$ . Naravno, to vrijedi i za  $b = 2^n$ . ■

## Dijeljenje cijelih brojeva bez predznaka

Zbog toga, **dijeljenje s ostatkom** u skupu  $\mathbb{Z}_{2^n}$  prikazivih cijelih brojeva **bez predznaka** u računalu

☛ daje **potpuno iste rezultate** kao da dijelimo u  $\mathbb{Z}$  (ili  $\mathbb{N}_0$ ).

Dakle, **nema ostataka** modulo  $2^n$  i “čarolija” s prikazivošću rezultata (nije potrebno, jer **radi** i bez toga).

Operacije **div** i **mod** su **jedine** aritmetičke operacije koje na **prikazivim cijelim brojevima bez predznaka**  $\mathbb{Z}_{2^n}$  daju **iste** rezultate kao i na skupu  $\mathbb{N}_0$  kojeg modeliramo.

Ponovimo još jednom da ostale **tri** operacije **+**, **-** i **·**

☛ daju **cjelobrojni rezultat modulo**  $2^n$ .

## Euklidov teorem u prstenu $\mathbb{Z}_b$ (dodatak)

Uočite da, za operacije **div** i **mod** na skupu  $\mathbb{Z}_b$ , koristimo Euklidov teorem za **cijele** brojeve, tj. na domeni  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

**Pitanje:** Kad znamo da je  $(\mathbb{Z}_b, \oplus_b, \odot_b)$  prsten, kao i  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , zašto ne uzmemo “**prirodniju**” domenu  $\mathbb{Z}_b \times (\mathbb{Z}_b \setminus \{0\})$ ?

**Odgovor:** Na toj domeni, s pripadnim **modularnim** operacijama  $\oplus_b$  i  $\odot_b$ , također, **vrijedi** Euklidov teorem, ali **nema jedinstvenosti** rezultata.

**Euklidov teorem u prstenu**  $(\mathbb{Z}_b, \oplus_b, \odot_b)$ . Za bilo koja dva broja  $A, B \in \mathbb{Z}_b$ , uz  $B > 0$ , **postoje** brojevi  $Q, R \in \mathbb{Z}_b$ , takvi da je

$$A = Q \odot_b B \oplus_b R \quad \text{i} \quad 0 \leq R < B,$$

ali ti brojevi **ne moraju** biti jedinstveni. ■

## Euklidov teorem u prstenu $\mathbb{Z}_b$ (dodatak)

**Primjer.** Uzmimo  $b = 2^3 = 8$ , tj. prsten  $(\mathbb{Z}_8, \oplus_8, \odot_8)$ , i brojeve  $A = 5$ ,  $B = 4$ . Onda je, kao u cijelim brojevima,

$$5 = 1 \cdot 4 + 1,$$

tj.  $5 \text{ div } 4 = 1$  i  $5 \text{ mod } 4 = 1$ . Ali, zbog  $2 \odot_8 4 = 0 \text{ mod } 8$ , vrijedi i

$$5 = 3 \odot_8 4 \oplus_8 1 = 13 \text{ mod } 8,$$

$$5 = 5 \odot_8 4 \oplus_8 1 = 21 \text{ mod } 8,$$

$$5 = 7 \odot_8 4 \oplus_8 1 = 29 \text{ mod } 8.$$

**Modularni** kvocijenti (s ostatkom 1) su 1, 3, 5 i 7, a **najmanji** je “pravi”.

Ostatak, također, **nije** jedinstven, jer je  $5 = 2 \odot_8 4 \oplus_8 5$ . ■

# Prikaz cijelih brojeva s predznakom (precizno)

## Veza između prikaza i aritmetike

Kod brojeva bez predznaka, prikaz binarnim znamenkama je očito odgovarao aritmetici — recimo, ovako:

- kad prikazu broja  $B$  (kao nizu bitova u bazi 2) dodamo 1, dobijemo točno prikaz broja  $B + 1$ .

(Hm, nismo baš puno razmišljali o tome).

Modularna aritmetika modulo  $2^n$  dodatno još “zatvara krug” na  $n$  bitova, tj. daje zatvorenost operacija, a onda i dobru strukturu prstena s jedinicom na  $\mathbb{Z}_{2^n} = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ .

Zato gore, umjesto običnog cjelobrojnog  $+$ , koristimo  $\oplus_{2^n}$ .

Potpuno isto mora vrijediti i za prikaze cijelih brojeva s predznakom iz skupa  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$  — inače nemamo jednostavnu realizaciju aritmetike i dobru strukturu.



# Prikaz cijelih brojeva s predznakom (*dodatak*)

Detaljnija argumentacija ovog zaključka ide na sljedeći način.

Prvo “poklopimo” zajednički dio nenegativnih brojeva

$$0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$$

u ta dva skupa. Svaki od tih brojeva ima isti prikaz u oba skupa, pa ih “sparujemo”

$$B \in \mathbb{Z}_{2^n}^- \iff B \in \mathbb{Z}_{2^n},$$

za  $B = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ .

Uočite da

🔴 prikazi svih ovih brojeva imaju vodeći bit jednak 0.

## Prikaz cijelih brojeva s predznakom (*dodatak*)

Zatim “zatvaramo modularni krug”, dodavanjem *jedan po jedan* modulo  $2^n$ , i “sparujemo” odgovarajuće brojeve.

Prvi “dodaj *jedan*” modulo  $2^n$  daje

$$((2^{n-1} - 1) + 1) \bmod 2^n = 2^{n-1} \bmod 2^n = \begin{cases} 2^{n-1} \in \mathbb{Z}_{2^n}, \\ -2^{n-1} \in \mathbb{Z}_{2^n}^- \end{cases}$$

tj. *zatvara krug* u  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$ , pa “sparujemo”

$$-2^{n-1} \in \mathbb{Z}_{2^n}^- \iff 2^{n-1} \in \mathbb{Z}_{2^n}.$$

A dalje sve ide redom.

## Prikaz cijelih brojeva s predznakom (dodatak)

Kad “dodaj jedan” ponovimo  $k$  puta, tj. kad broju  $2^{n-1} - 1$  dodamo  $k$  modulo  $2^n$ , izlazi:

$$-2^{n-1} + (k - 1) \in \mathbb{Z}_{2^n}^- \iff (2^{n-1} - 1) + k \in \mathbb{Z}_{2^n},$$

za  $k = 1, \dots, 2^{n-1}$ . Supstitucijom  $-B = -2^{n-1} + (k - 1)$ , za negativne brojeve dobivamo

$$-B \in \mathbb{Z}_{2^n}^- \iff 2^n - B \in \mathbb{Z}_{2^n},$$

i to vrijedi za  $B = 1, \dots, 2^{n-1}$ .

Dakle, spareni brojevi razlikuju se za točno  $2^n$ .

To je jasno, jer moraju imati isti “pravi” ostatak modulo  $2^n$ .

# Prikaz cijelih brojeva s predznakom (*dodatak*)

Zaključak: za  $B = 1, \dots, 2^{n-1}$ ,

- prikaz **negativnog** broja  $-B$  (s predznakom)
- **jednak** je prikazu broja  $2^n - B$  (bez predznaka).

Uočite da

- prikazi svih ovih brojeva imaju **vodeći bit** jednak 1. ■

## Vodeći bit — predznak

U prikazu cijelih brojeva s predznakom

- svi **nenegativni** brojevi imaju **vodeći bit** jednak 0, a
- svi **negativni** brojevi imaju **vodeći bit** jednak 1.

Zato se vodeći bit, obično, zove i **bit predznaka** (engl. **sign**).

Taj naziv, nažalost, može zavesti na **pogrešnu** ideju o prikazu. Prikaz cijelih brojeva s predznakom **ne dobiva** se kao:

- bit **predznaka** i prikaz **apsolutne** vrijednosti broja (bez predznaka, s bitom manje).

Za preciznu argumentaciju — v. dodatak (sljedeći odjeljak).

Za razliku od ovog, kod “realnih” brojeva to **vrijedi**, što samo povećava mogućnost zabune.

# Komplementiraj i dodaj 1 (precizna argumentacija)

## Veza broja i prikaza s predznakom

Zasad znamo da za prikaz cijelih brojeva s predznakom vrijedi:

- nenegativni brojevi  $B = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$  imaju isti prikaz kao i bez predznaka,
- negativni brojevi  $B = -1, \dots, -2^{n-1}$  imaju isti prikaz kao i brojevi  $2^n + B$  bez predznaka.

Tj., imamo dva različita slučaja, ovisno o “predznaku” broja.

Da bismo dobili vezu između  $n$  bitova u prikazu broja  $B$  s predznakom i samog broja, postupamo na sljedeći način.

Broju  $B \in \mathbb{Z}_{2^n}^-$  pridružimo broj  $B' \in \mathbb{Z}_{2^n}$ , tako da

- $B'$  bez predznaka ima isti prikaz na  $n$  bitova kao i broj  $B$  s predznakom.

Taj broj  $B'$  označavamo s  $\text{prikaz}(B)$ .

## Veza broja i prikaza s predznakom (nastavak)

Već znamo da je

$$\text{prikaz}(B) = \begin{cases} B, & \text{za } B = 0, \dots, 2^{n-1} - 1, \\ 2^n + B, & \text{za } B = -1, \dots, -2^{n-1}. \end{cases}$$

Nama treba “obratna” veza:

$$B = \begin{cases} \text{prikaz}(B), & \text{za } \text{prikaz}(B) = 0, \dots, 2^{n-1} - 1, \\ \text{prikaz}(B) - 2^n, & \text{za } \text{prikaz}(B) = 2^{n-1}, \dots, 2^n - 1, \end{cases}$$

jer  $\text{prikaz}(B)$  ima **jednostavnu** vezu sa svojim bitovima.

A onda je lako.



## Veza broja i prikaza s predznakom (nastavak)

Neka je

$$[\text{bit}_{n-1} \text{ bit}_{n-2} \dots \text{bit}_1 \text{ bit}_0]$$

zapis prikazivog cijelog broja  $B \in \mathbb{Z}_{2^n}^-$  s predznakom, gdje su  $\text{bit}_i \in \{0, 1\}$  bitovi u prikazu, za  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Po definiciji,  $\text{prikaz}(B)$  ima isti zapis bez predznaka, pa su bitovi  $\text{bit}_i$  baš binarne znamenke broja  $\text{prikaz}(B)$ , tj. vrijedi

$$\text{prikaz}(B) := \text{bit}_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + \text{bit}_1 \cdot 2 + \text{bit}_0.$$

Supstitucijom u “obratnu” vezu odmah dobivamo relacije za broj  $B$  preko bitova u njegovom prikazu s predznakom.

## Veza broja i prikaza s predznakom (nastavak)

Opet imamo dva slučaja, ovisno o “predznaku”:

•  $B = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$ , tj.  $B \geq 0 \iff \text{bit}_{n-1} = 0$ , i tada je

$$\begin{aligned} B &= 0 \cdot 2^{n-1} + \text{bit}_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \text{bit}_1 \cdot 2 + \text{bit}_0 \\ &= \text{bit}_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \text{bit}_1 \cdot 2 + \text{bit}_0, \end{aligned}$$

•  $B = -1, \dots, -2^{n-1}$ , tj.  $B < 0 \iff \text{bit}_{n-1} = 1$ , i tada je

$$\begin{aligned} B &= (1 \cdot 2^{n-1} + \text{bit}_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \text{bit}_1 \cdot 2 + \text{bit}_0) - 2^n \\ &= (\text{bit}_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \text{bit}_1 \cdot 2 + \text{bit}_0) - 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Za negativne  $B$ , bitovi  $\text{bit}_i$  nisu binarne znamenke od  $B$ .

# Komplement bita

Sad ćemo izvesti jedno **jednostavno** pravilo o prikazu koje vrijedi (u istom obliku) za **sve** prikazive brojeve.

Prvo moramo uvesti pojmove **komplementa jednog bita** i **komplementa broja** (bez predznaka).

**Definicija.** **Komplement bita** (binarne znamenke)  $b \in \{0, 1\}$ , u oznaci  $\bar{b}$ , definiramo ovako:

$$\bar{b} := 1 - b.$$

Odmah vidimo da je

$$\bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0,$$

pa je operacija **komplement** aritmetički ekvivalent **negacije**. ■

# Komplement broja bez predznaka

Definicija. Komplement prikazivog cijelog broja  $B' \in \mathbb{Z}_{2^n}$  (bez predznaka) na  $n$  bitova definiramo ovako:

- nađemo prikaz broja  $B'$ , tj. svih  $n$  bitova u prikazu,

$$[b_{n-1} \ b_{n-2} \ \dots \ b_1 \ b_0],$$

- komplementiramo svaki bit u prikazu,  $b'_i \mapsto \bar{b}'_i$ ,

$$[\bar{b}_{n-1} \ \bar{b}_{n-2} \ \dots \ \bar{b}_1 \ \bar{b}_0],$$

- očitalimo broj  $\bar{B}'$  čiji je to prikaz. ■

Ovo možemo definirati i za brojeve s predznakom, ali nam neće trebati (da ne stvara zabunu).

# Komplement broja bez predznaka (nastavak)

Dakle, ako je  $B' \in \mathbb{Z}_{2^n}$  oblika

$$B' = b'_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b'_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + b'_1 \cdot 2 + b'_0,$$

onda je, očito,  $\bar{B}' \in \mathbb{Z}_{2^n}$  i vrijedi

$$\bar{B}' = \bar{b}'_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \bar{b}'_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \dots + \bar{b}'_1 \cdot 2 + \bar{b}'_0.$$

Uočimo da za **svaki bit** vrijedi  $b + \bar{b} = 1$  i **zbrojimo** ove dvije relacije. Dobivamo

$$\begin{aligned} B' + \bar{B}' &= 1 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot 2^{n-2} + \dots + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

# Prikaz suprotnog broja preko komplementa

Prebacimo 1 s desne na lijevu stranu

$$B' + \bar{B}' + 1 = 2^n,$$

i zapišimo ovu relaciju “modularnim zbrajanjem”  $\oplus_{2^n}$  u  $\mathbb{Z}_{2^n}$

$$B' \oplus_{2^n} (\bar{B}' \oplus_{2^n} 1) = 0.$$

Dakle, **jedinstveni** suprotni element (= inverz obzirom na modularno zbrajanje) elementa  $B' \in \mathbb{Z}_{2^n}$  jednak je  $\bar{B}' \oplus_{2^n} 1$ .

Drugim riječima, **suprotni** broj dobivamo tako da

- **komplementiramo** broj (odnosno, njegov prikaz) i
- **dodamo 1** modulo  $2^n$ .

## Prikaz suprotnog broja preko komplementa

Napomena. Modularno dodavanje jedinice služi samo za  $B' = 0$ . Tada je  $\bar{B}' = 2^n - 1$  i moramo dodati 1 modularno, da opet dobijemo 0 kao suprotni element.

Za  $B' \in \mathbb{Z}_{2^n}$  i  $B' > 0$ , suprotni element je  $\bar{B}' + 1$ . ■

Potpuno isto “pravilo” vrijedi i za brojeve s predznakom!

Prisjetimo se da je prikaz negativnih brojeva iz  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$  “podešen” tako da modularna aritmetika radi korektno.

To znači da za svaki  $B \in \mathbb{Z}_{2^n}^-$  vrijedi

$$\text{prikaz}(B) \oplus_{2^n} \text{prikaz}(-B) = 0.$$

Ovdje  $-B$  treba smatrati suprotnim elementom od  $B$  u  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$ .

## Prikaz suprotnog broja preko komplementa

Znamo da je prikaz( $B$ ) =  $B'$ , za neki  $B' \in \mathbb{Z}_{2^n}$ , pa mora biti

$$\text{prikaz}(-B) = \bar{B}' \oplus_{2^n} 1,$$

zbog jedinstvenosti suprotnog elementa u  $\mathbb{Z}_{2^n}$ .

Opet, prikaz suprotnog broja prikaz( $-B$ ) dobivamo tako da

- komplementiramo prikaz samog broja prikaz( $B$ ) =  $B'$  i
- dodamo 1 modulo  $2^n$ .

Ovaj zaključak je direktna posljedica modularne aritmetike u  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$  i ne ovisi o tome koji broj  $B' \in \mathbb{Z}_{2^n}$  izaberemo za prikaz zadanog broja  $B \in \mathbb{Z}_{2^n}^-$ . Zato i treba dodatno fiksirati prikaz barem jednog broja iz  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$  (na primjer,  $B = 0$  na isti prikaz kao  $0 \in \mathbb{Z}_{2^n}$ ) da dobijemo jedinstvenost prikaza. ■



# Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

# Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom — uvod

Ranije smo uveli operacije  $\text{div}$  (cjelobrojni kvocijent) i  $\text{mod}$  (ostatak) na skupu  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .

**Definicija.** Neka su  $a \in \mathbb{Z}$  i  $b \in \mathbb{N}$  bilo koji brojevi, i neka su  $q \in \mathbb{Z}$  (cjelobrojni kvocijent) i  $r \in \mathbb{Z}_b$  (ostatak) **jedinstveni** brojevi za koje vrijedi

$$a = q \cdot b + r.$$

Operacije  $\text{div}$  i  $\text{mod}$  **definiramo** relacijama

$$a \text{ div } b := q \in \mathbb{Z}, \quad a \text{ mod } b := r \in \mathbb{Z}_b.$$

Za početak, uočite da su **obje** operacije definirane na skupu  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , a kodomene su im **različite**. ■

# Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom — uvod

Sad nam **treba** proširenje na skup  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ,

- kad **cjelobrojno dijelimo dva cijela broja** (što, naravno, ima smisla),

da dobijemo **cjelobrojno** dijeljenje za cijele brojeve **s predznakom**  $\mathbb{Z}_{2^n}^-$  (koji modeliraju skup  $\mathbb{Z}$ ).

Naravno, ideja je ista kao i kod brojeva bez predznaka.

Cjelobrojno dijeljenje ili **dijeljenje s ostatkom** cijelih brojeva **s predznakom** je naprosto

- **restrikcija** odgovarajućih operacija **div** i **mod**.

Tek u novije vrijeme postoji **dogovoreni standard** (tzv. **C99**)

- za proširenje operacija **div** i **mod** na  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ .

## Dijeljenje cijelih brojeva — što je problem?

Primjer. Neka je  $a = 5$  i  $b = 3$ . Onda je

•  $5 = 1 \cdot 3 + 2$ , pa je kvocijent  $q = 1$  i ostatak  $r = 2$ .

Neka je sad  $a = -5$  i  $b = 3$ . Za kvocijent  $q$  i ostatak  $r$  mora vrijediti  $a = q \cdot b + r$ . Ostaje izbor/restrikcija ostatka  $r$ .

U Euklidovom teoremu je uvijek  $r \geq 0$ , tj.  $r \in \mathbb{Z}_b$ . Onda je

•  $-5 = -2 \cdot 3 + 1$ , pa je  $q = -2$  i  $r = 1$ .

To nema “nikakve veze” s prethodnim rezultatima za pripadne apsolutne vrijednosti!

Međutim, ako dozvolimo negativni ostatak  $r \in -\mathbb{Z}_b$ , onda je

•  $-5 = -1 \cdot 3 - 2$ , pa je  $q = -1$  i  $r = -2$ .

• Apsolutne vrijednosti kvocijenta i ostatka ostaju iste! ■