

Programiranje 1

9. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.pmf.unizg.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Osnovni algoritmi na cijelim brojevima:
 - Uvod — što se hoće.
 - Broj znamenki cijelog broja.
 - Zbroj (suma) i umnožak (produkt) znamenki broja.
 - Najveća (najmanja) znamenka broja.
 - Provjere znamenki broja (postoji, svaka).
 - Palindrom.
 - Najveća zajednička mjera — Euklidov algoritam.
 - Potencija broja 2.
 - Binarni prikaz cijelog broja u računalu.

Informacije — Praktični kolokvij

Praktični kolokvij (prvi krug) kreće u 9. tjednu nastave,

🕒 ≈ srijeda, 12. 12. — četvrtak, 20. 12. (subota uklj.)

Razlog: da stignemo napraviti funkcije i srediti termine.

Informacije o organizaciji bit će objavljene na webu kolegija.

Zapamtite: Vrijeme za rješenje je 45 minuta.

🕒 Zadaci su objavljeni na webu — pod Materijali, 2. točka (to su isti zadaci kao prošle godine, nema promjena).

🕒 Korisno je odmah pogledati i početi vježbati.

Osnovni algoritmi na cijelim brojevima

Sadržaj predavanja

- Osnovni algoritmi na cijelim brojevima:
 - Uvod — što se hoće.
 - Broj znamenki cijelog broja.
 - Zbroj (suma) i umnožak (produkt) znamenki broja.
 - Najveća (najmanja) znamenka broja.
 - Provjere znamenki broja (postoji, svaka).
 - Palindrom.
 - Najveća zajednička mjera — Euklidov algoritam.
 - Potencija broja 2.
 - Binarni prikaz cijelog broja u računalu.

Uvod — što je cilj?

Cilj je, zapravo, vrlo jednostavan:

- konstrukcija, implemenatcija i analiza jednostavnih (osnovnih) algoritama,
- sastavljenih od jedne petlje i nekoliko uvjetnih naredbi,
- na najjednostavnijim podacima — cijelim brojevima.

Kasnije ćemo iste ili slične algoritme koristiti na složenijim podacima:

- nizovi na ulazu, polja, vezane liste i sl.

Danas ćemo pisati cijele programe ili odsječke programa. Kad napravimo funkcije, onda ćemo

- neke od tih algoritama realizirati kao funkcije.

Osnovne pretpostavke i dogovori

Ulazni podaci su:

- nenegativni cijeli brojevi, tj. brojevi iz skupa \mathbb{N}_0 , osim ako nije drugačije rečeno.

Za prikaz podataka standardno koristimo

- tip `unsigned int`.

Može i “obični” `int`, ako nam raspon prikazivih brojeva nije jako bitan.

Katkad ćemo dozvoliti

- i negativne cijele brojeve, tj. brojeve iz skupa \mathbb{Z} .

Tada za prikaz koristimo tip `int`.

Osnovne pretpostavke i dogovori (nastavak)

Dogovor. Sve **algoritme** realiziramo u **cjelobrojnoj** aritmetici. Realnu aritmetiku izbjegavamo zbog mogućih grešaka zaokruživanja.

Oprez: Neovisno o tipu kojeg koristimo za prikaz brojeva,

- skup **prikazivih** brojeva u računalu je **konačan**,
- a **aritmetika** cijelih brojeva je **modularna** aritmetika!

Na to treba **paziti** kod konstrukcije i izbora **algoritma**. Jedan od **bitnih** ciljeva je:

- algoritam treba raditi **korektno** za što “**veći**” skup **ulaznih** podataka.
- Po mogućnosti — za **svaki prikazivi** ulazni podatak!

Broj znamenki broja

Primjer. Program treba učitati cijeli broj n (tipa `int`) i naći broj dekadskih znamenki tog broja.

Najlakši algoritam dobivamo jednostavnim

- “brisanjem” znamenki — i to “straga” (lakše je).

Usput, treba samo

- brojati obrisane znamenke!

Uzmimo da je $n = 123$. Zadnja znamenka je $n \bmod 10 = 3$.

Međutim, sama znamenka nam *ne treba*. Kako ćemo “obrisati” tu znamenku?

- Tako da broj *podijelimo* s bazom 10.

- Odgovarajuća naredba je: $n = n / 10$ ili $n /= 10$.

Broj znamenki broja (nastavak)

Ovo ponavljamo u **petlji**, s tim da

- svaki puta **povećamo** broj obrisanih znamenki za **1**.

Na **početku**, brojač **inicijaliziramo** na **0** — jer još nismo obrisali **niti jednu** znamenku!

Zadnje pitanje je “**kontrola**” petlje — **do kada** ponavljamo ovaj postupak?

- Sve dok broj ima **bar jednu** znamenku, koju još **nismo** obrisali.

A kad je to? **Sve dok** je $n \neq 0$.

Drugim riječima,

- ponavljanje **prekidamo** kad obrišemo **sve** znamenke, tj. kad **n** postane **nula**.

Broj znamenki broja (nastavak)

U našem primjeru, za $n = 123$, imamo redom:

- $n = n / 10$ daje $n = 12$, a broj obrisanih znamenki je 1.
- $n = n / 10$ daje $n = 1$, a broj obrisanih znamenki je 2.
- $n = n / 10$ daje $n = 0$, a broj obrisanih znamenki je 3.

Dakle, sve radi korektno!

Izbor naredbe za realizaciju petlje u programu:

- Broj znamenki **ne** znamo unaprijed (baš to tražimo), pa je **prirodno** koristiti **while** ili **do-while**.

Uz malo više iskustva u C-u, vidjet ćete da može i **for**.

Dogovorno uzimamo da $n = 0$ ima **nula** znamenki! To ima smisla u **normaliziranom** prikazu broja u bazi.

Onda **koristimo while** petlju, a ne **do-while**.

Broj znamenki broja (nastavak)

```
#include <stdio.h>

/* Broj dekadskih znamenki cijelog broja. */

int main(void)
{
    int n, broj_znam;

    printf(" Upisi cijeli broj n: ");
    scanf("%d", &n);
```

Broj znamenki broja (nastavak)

```
broj_znam = 0;
while (n != 0) {
    ++broj_znam;
    n /= 10;    /* Brisi zadnju znamenku. */
}

printf(" Broj znamenki = %d\n", broj_znam);

return 0;
}
```

Za ulaz 12345, program ispisuje

Broj znamenki = 5

Broj znamenki broja (nastavak)

Realizacija ključnog dijela programa `for` petljom, bazirana na vezi između `for` i `while` petlji — tipična za `C`:

```
broj_znam = 0;
for (; n != 0; n /= 10)
    ++broj_znam;
```

Uočite da “inicijalizacije” **nema**, a “pomak” je upravo **brisanje** znamenki!

Može i ovako — **kratko**, ali nije baš lako za **pročitati**:

```
for (broj_znam = 0; n != 0; n /= 10)
    ++broj_znam;
```

Broj znamenki broja (nastavak)

Nekoliko pitanja.

- Za koje cijele brojeve n program radi korektno?
 - Odgovor: za sve prikazive, uključivo i negativne!
- Kolika je vrijednost broja n na kraju — nakon završetka algoritma?
 - Odgovor: $n = 0$.

Dakle, algoritam je “destruktivan” — uništava ulazni broj n . Ako to nećemo, treba napraviti kopiju od n u pomoćnu varijablu, na pr. `temp_n`, i nju “uništiti”.

- Kolika je složenost ovog algoritma?
 - Odgovor: Broj prolaza kroz petlju je upravo broj znamenki broja n .

Broj znamenki broja u zadanoj bazi

Zanimljivo je da **isti** algoritam radi korektno i u bilo kojoj drugoj **bazi** $b \geq 2$.

Ako je $n \in \mathbb{N}$, onda prikaz u **bazi** b ima oblik

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0,$$

s tim da je ovaj prikaz **normaliziran**, tj. za znamenke vrijedi

$$a_0, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad \text{i} \quad a_k > 0.$$

Dogovorno smatramo da $n = 0$ **nema** znamenki!

U nastavku prelazimo na **nenegativne** brojeve, da nas **predznak** “ne smeta”.

Broj znamenki broja u zadanoj bazi (nastavak)

Napomena.

- Oznaka konverzije za čitanje i pisanje nenegativnih brojeva tipa `unsigned int` je `%u`.
- Konstante se pišu s nastavkom (sufiksom) `u` — poput `0u`.

U algoritmima i programima koji slijede,

- namjerno je ispušten `u`, da se lakše čita.

Naime, bitni dio svih algoritama radi i u tipu `int`.

Broj znamenki broja u zadanoj bazi (nastavak)

```
#include <stdio.h>

/* Broj znamenki broja n u bazi b.
   Unistava n dijeljenjem.
*/

int main(void)
{
    unsigned int b = 10, n, broj_znam;

    printf(" Upisi nenegativni broj n: ");
    scanf("%u", &n);
    printf("\n Broj %u", n);
}
```

Broj znamenki broja u zadanoj bazi (nastavak)

```
broj_znam = 0;
while (n > 0) {
    ++broj_znam;
    n /= b;
}

printf(" ima %u znamenki u bazi %u\n",
       broj_znam, b);

return 0;
}
```

Zadatak. Dodajte na kraj programa ispis **završne** vrijednosti varijable **n** i provjerite da je **n = 0**.

Broj znamenki broja u zadanoj bazi — logaritam

Ako je $n \in \mathbb{N}$ i ako je

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

normalizirani prikaz tog broja u bazi b , tj. vrijedi

$$a_0, \dots, a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad \text{i} \quad a_k > 0,$$

onda broj znamenki $= k + 1$ možemo izračunati i direktno — preko logaritma

$$k + 1 = \lfloor \log_b n \rfloor + 1.$$

Međutim, to zahtijeva realnu aritmetiku, a ona ima greške zaokruživanja.

Broj znamenki broja — logaritam (nastavak)

U zaglavlju `<math.h>` postoje dvije funkcije za logaritam:

- `log` = `ln`,
- `log10` = `log10`.

Nama treba logaritam u bazi b . To dobijemo ovako, uz $n > 0$:

$$\log_b n = \frac{\ln n}{\ln b} = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b}.$$

“Najveće cijelo” (za nenegativne brojeve) možemo dobiti pretvaranjem tipova:

- `cast` operatorom (`int`) ili (`unsigned int`).

Oprez: izračunati logaritam može imati malu grešku (nadolje) — koja je dovoljna za pogrešan rezultat!

Broj znamenki broja — logaritam (nastavak)

Hoće li **zaista** doći do **greške** i za **koje** brojeve n i baze b ,

- ovisi o konkretnoj C–biblioteci koja stiže uz prevoditelj.

Na primjer, na **Intelovom** prevoditelju na Windowsima (biblioteka je **Microsoftova**):

- \log_{10} radi **korektno** u bazi 10, ali **log ne radi** za $n = 10^6$:

- $\log(1000000) / \log(10) = 5.999999999999999999$,

pa izlazi da $n = 10^6$ ima **6**, a ne **7** znamenki!

- \log radi **korektno** u bazi 2,

- **log ne radi** u bazi 3, već za $n = 3^5 = 243$:

- $\log(243) / \log(3) = 4.999999999999999999$.

Izlazi da $n = 3^5$ ima **5**, a ne **6** znamenki u bazi 3!

Broj znamenki broja — potenciranje baze

Umjesto “destruktivnog” brisanja znamenki *straga*, što je

- *dijeljenje* broja s bazom (odnosno, potencijom baze), može i ovako:

- *potenciraj bazu* (množenje potencije bazom), sve dok ...

Oprez s kriterijem *ponavljanja* ili *zaustavljanja*, ako želimo da algoritam radi za *sve* prikazive brojeve!

- *Ne valja*: ... sve dok je broj *n* *veći ili jednak* od *potencije* baze — jer, na kraju je *manji*!

- *Bolje* je: ... sve dok je kvocijent *n/potencija* *veći ili jednak* od *baze*.

Zadatak. Napišite program koji odgovara ovom algoritmu i pažljivo ga testirajte! Dodajte mu *pisanje* znamenki *sprijeda*.

Obrada znamenki broja — općenito

U nastavku ide hrpa varijacija na temu “obrade” znamenki broja u zadanoj bazi.

Ako redoslijed obrade (poredak znamenki) **nije** bitan, onda obrada može ići na **isti** način kao i **brojanje** znamenki:

- odgovarajuća **inicijalizacija** rezultata;
- **petlja** za obradu znamenki — sve dok “ima znamenki”
 - **izdvoji zadnju** znamenku (tj., straga) = modulo baza;
 - **obradi** ju;
 - **obriši** ju (kao kod brojanja).

I to je to!

Zbroj ili suma znamenki broja

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa `unsigned int`) i naći

• **zbroj** znamenki tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Traženi rezultat je

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k.$$

Algoritamski:

$$\text{rezultat} = \text{rezultat} + a_i, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Inicijalizacija za zbrajanje?

• **Neutral** za zbrajanje: `rezultat = 0`.

Ovo je i **dogovor** za sumu **praznog** skupa!

Zbroj ili suma znamenki broja (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
printf("\n n = %u\n", n);

suma = 0;
while (n > 0) {
    suma += n % b;
    n /= b;
}

printf(" Suma znamenki u bazi %u je %u\n",
      b, suma);
```

Umnožak ili produkt znamenki broja

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa `unsigned int`) i naći

• **produkt** znamenki tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Traženi rezultat je

$$a_0 \cdot a_1 \cdots a_k.$$

Algoritamski:

$$\text{rezultat} = \text{rezultat} \cdot a_i, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Inicijalizacija za množenje?

• **Neutral** za množenje: `rezultat = 1`.

Ovo je i **dogovor** za produkt **praznog** skupa!

Umnožak ili produkt znamenki broja (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
printf("\n n = %u\n", n);
```

```
prod = 1;
while (n > 0) {
    prod *= n % b;
    n /= b;
}
```

```
printf(" Produkt znamenki u bazi %u je %u\n",
      b, prod);
```

Najveća znamenka broja

Primjer. Program treba učitati nenegativni cijeli broj n (tipa `unsigned int`) i naći

• najveću znamenku tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Traženi rezultat je

$$\max\{a_0, a_1, \dots, a_k\}.$$

Algoritamski:

$$\text{rezultat} = \max\{\text{rezultat}, a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Inicijalizacija za maksimum?

• Maksimum jednočlanog skupa $\{a_0\}$: $\text{rezultat} = a_0$.

Maksimum nema neutral, odnosno, maksimum praznog skupa nije definiran! Zato gore startamo s $i = 1$, a ne od nule.

Najveća znamenka broja (nastavak)

```
if (n > 0) {
    max_znam = n % b;    /* Zadnja znamenka. */
    n /= b;
    while (n > 0) {
        znam = n % b;
        if (znam > max_znam) max_znam = znam;
        n /= b;
    }
    printf(" Najveca znamenka u bazi %u je"
           " %u\n", b, max_znam);
}
else
    printf(" Nema znamenki\n");
```

Najveća znamenka broja — Izbjegavati!

```
/* Najveća znamenka broja n u bazi b.
   ‘‘Lazna’’ inicijalizacija na -1
   ne može u tipu unsigned, pa stavim 0.
   Unistava n dijeljenjem.
*/
max_znam = 0;
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam > max_znam) max_znam = znam;
    n /= b;
}
printf(" Najveća znamenka u bazi %u je %u\n",
       b, max_znam);
```

Najmanja znamenka broja

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa `unsigned int`) i naći

• **najmanju znamenku** tog broja u zadanoj bazi $b = 10$.

Traženi rezultat je

$$\min\{a_0, a_1, \dots, a_k\}.$$

Algoritamski:

$$\text{rezultat} = \min\{\text{rezultat}, a_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Inicijalizacija za minimum?

• Minimum **jednočlanog** skupa $\{a_0\}$: $\text{rezultat} = a_0$.

Minimum **nema neutral**, odnosno, minimum **praznog skupa nije definiran!** Zato gore startamo s $i = 1$, a **ne** od nule.

Najmanja znamenka broja (nastavak)

```
if (n > 0) {
    min_znam = n % b;    /* Zadnja znamenka. */
    n /= b;
    while (n > 0) {
        znam = n % b;
        if (znam < min_znam) min_znam = znam;
        n /= b;
    }
    printf(" Najmanja znamenka u bazi %u je"
           " %u\n", b, min_znam);
}
else
    printf(" Nema znamenki\n");
```

Najmanja znamenka broja — Izbjegavati!

```
/* Najmanja znamenka broja n u bazi b.
   'Lazna' inicijalizacija na b.
   Unistava n dijeljenjem.
*/
min_znam = b;
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam < min_znam) min_znam = znam;
    n /= b;
}

printf(" Najmanja znamenka u bazi %u je %u\n",
       b, min_znam);
```

Provjere znamenki broja

Najjednostavniji primjeri “provjere” odgovaraju standardnim kvatifikatorima u matematici:

- Postoji (\exists) li objekt sa zadanim svojstvom?
- Ima li **svaki** (\forall) objekt zadano svojstvo?

Rezultat je odgovor na postavljeno pitanje, tj. rezultat ima “logički” tip

- DA/NE, istina/laž, ili 1/0.

Postoji znamenka ... ?

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa `unsigned int`) i naći odgovor na pitanje

- **postoji** li **znamenka** tog broja koja je jednaka **5** (u zadanoj bazi $b = 10$).

Traženi rezultat je

$$(a_0 = 5) \vee (a_1 = 5) \vee \dots \vee (a_k = 5).$$

Algoritamski:

$$\text{rezultat} = \text{rezultat} \ || \ (a_i == 5), \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Inicijalizacija za postoji? Prazan skup!

Inicijalizacija za disjunkciju (ili)?

- **Neutral** za disjunkciju: **rezultat = 0** (laž).

Postoji znamenka ...? (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
odgovor = 0;    /* NE, laz. */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    odgovor = odgovor || (znam == trazena);
    n /= b;
}

if (odgovor)
    printf(" Odgovor je DA\n");
else
    printf(" Odgovor je NE\n");
```

Postoji znamenka ...? (nastavak)

Skraćena varijanta koja **prekida** petlju čim **sazna** odgovor:

```
odgovor = 0;    /* NE, laz. */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam == trazena) {
        odgovor = 1;
        break;
    }
    n /= b;
}
```

Svaka znamenka ... ?

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa `unsigned int`) i naći odgovor na pitanje

• je li **svaka** znamenka tog broja jednaka **5** (u zadanoj bazi $b = 10$).

Traženi rezultat je

$$(a_0 = 5) \wedge (a_1 = 5) \wedge \dots \wedge (a_k = 5).$$

Algoritamski:

$$\text{rezultat} = \text{rezultat} \ \&\& \ (a_i == 5), \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Inicijalizacija za svaki? Prazan skup!

Inicijalizacija za konjunktiju (i)?

• **Neutral** za konjunktiju: **rezultat = 1** (istina).

Svaka znamenka ... ? (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
odgovor = 1;    /* DA, istina. */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    odgovor = odgovor && (znam == trazena);
    n /= b;
}

if (odgovor)
    printf(" Odgovor je DA\n");
else
    printf(" Odgovor je NE\n");
```

Svaka znamenka ... ? (nastavak)

Skraćena varijanta koja **prekida** petlju čim **sazna** odgovor:

```
odgovor = 1;    /* DA, istina. */
while (n > 0) {
    znam = n % b;
    if (znam != trazena) {
        odgovor = 0;
        break;
    }
    n /= b;
}
```

Palindrom

Primjer. Program treba učitati **nenegativni** cijeli broj **n** (tipa **unsigned int**) i naći odgovor na pitanje

🔴 je li broj **n** **palindrom** (u zadanoj bazi $b = 10$), tj. “čita” li se **n** **jednako** s obje strane?

Na primjer, **14741** je palindrom, a **14743** nije.

Trik: umjesto provjere odgovarajućih znamenki,

- 🔴 **prva = zadnja, druga = predzadnja, ...**
(probajte to napisati tako da radi za **svaki** prikazivi **n** i **b**),
- 🔴 napravimo broj s **obratnim** poretком znamenki i usporedimo ga s **polaznim** brojem!

Palindrom (nastavak)

```
#include <stdio.h>

/* Provjera je li prirodni broj palindrom. */

int main(void)
{
    unsigned int b = 10;
    unsigned int n, m1, m2, palindrom;

    printf(" Upisi nenegativni broj n: ");
    scanf("%u", &n);

    printf(" Broj = %u\n", n);
```

Palindrom (nastavak)

```
m1 = n;
m2 = 0;
while (n > 0) {
    m2 = m2 * b + n % b;
    n /= b;
}
palindrom = m1 == m2 ? 1 : 0;

printf(" Palindrom = %u\n", palindrom);

return 0;
}
```

Palindrom — primjer za $n = 14743$

Primjer. Na početku je $m_1 = n = 14743$ i $m_2 = 0$.

n	pomak m_2 ulijevo (množenje s b)	dodaj $n \% b$	novi m_2	novi n
14743	$0 \cdot 10$	+ 3	3	1474
1474	$3 \cdot 10$	+ 4	34	147
147	$34 \cdot 10$	+ 7	347	14
14	$347 \cdot 10$	+ 4	3474	1
1	$3474 \cdot 10$	+ 1	34741	0

Rezultat je $m_2 = 34741 \neq m_1 = 14743 \implies n$ nije palindrom.

Palindrom — korektnost?

Pitanje. Radi li ovaj program **korektno** za **svaki** prikazivi ulaz?

- Uputa: Je li “**obratni**” broj uvijek **prikaziv**?
- Možemo li **zato** dobiti **pogrešan** odgovor u bazi $b = 10$?
(Odgovor je **NE**. Dokažite!)

Probajte i za druge **baze**!

Zadatak. Neka je baza $b = 2^{30} + 1 = 1073741825$, a broj je $n = b + 5 = 1073741830$. Je li odgovor ($= 1 = \text{da}$) **točan**?

Zadatak. **Koliko** ima baza b (u tipu **unsigned** na 32 bita), u kojima ovaj algoritam daje **pogrešan** odgovor za **bar jedan** n ?

Izazov = **program** (s podosta matematike prije toga):

ukupan broj nađenih baza = **715827889**, vrijeme = **0.23 s**!

Palindrom — korektna provjera znamenki

Bitni odsječak **korektnog** programa za provjeru **palindroma** izgleda ovako (v. program **pal_ok.c**):

```
        /* Potencija baze uz najvisu znamenku. */
pot = 1;
while (n / pot >= b)
    pot *= b;

        /* Moze i ovako, praznom for naredbom:
for (pot = 1; n / pot >= b; pot *= b);
        */

palindrom = 1;    /* DA, istina. */
```

Palindrom — korektna provjera (nastavak)

```
    /* Petlja za provjeru para znamenki. */
while (n >= b) {    // n ima bar dvije znamenke.
    znam1 = n / pot;    // Prva znamenka.
    znam2 = n % b;    // Zadnja znamenka.
    if (znam1 != znam2) {
        palindrom = 0;
        break;
    }

    n %= pot;    // Brisi prvu znamenku.
    n /= b;    // Brisi zadnju znamenku.
    pot = pot / b / b;    // Podijeli pot s b^2.
}
```


Najveća zajednička mjera

Primjer. Jedan od prvih algoritama u povijesti je **Euklidov** algoritam za nalaženje **najveće** zajedničke mjere $M(a, b)$, **cijelih** brojeva a i b , uz pretpostavku da je $b \neq 0$.

Algoritam se bazira na Euklidovom teoremu o dijeljenju

• $a = q \cdot b + r$, za neki $q \in \mathbb{Z}$, gdje je r **ostatak**, $0 \leq r < |b|$.

Ključni koraci:

• Ako $d \mid a$ i $d \mid b$, onda $d \mid r$, pa je $M(a, b) = M(b, r)$
(“**smanjujemo**” argumente, po apsolutnoj vrijednosti).

• Ako je $r = 0$, onda je $a = q \cdot b$, pa je $M(a, b) = b$ (**kraj**).

Test-primjeri: $a = 48$, $b = 36$ ili $a = 21$, $b = 13$.

Probajte i za negativne brojeve!

Najveća zajednička mjera (nastavak)

Dio programa koji računa $M(a, b)$:

```
int a, b, ostatak, mjera;
...
while (1) {
    ostatak = a % b;
    if (ostatak == 0) {
        mjera = b;
        break;
    }
    a = b;
    b = ostatak;
}
```

Najveća zajednička mjera (nastavak)

Ovaj algoritam radi i za negativne brojeve a , b ,

- samo se može dogoditi da je mjera negativna.

Kod skraćivanja racionalnog broja a/b , zadanog brojnikom a i nazivnikom b , korisno je tražiti da je $M(a, b) > 0$.

Jedna mogućnost je da izračunamo $M(|a|, |b|)$. Funkcije za apsolutnu vrijednost zovu se `abs` (za `int`) i `labs` (za `long int`), a deklarirane su u zaglavlju `<stdlib.h>`.

U tom slučaju, na početku algoritma treba dodati

```
a = abs(a); b = abs(b);
```

Još jednostavnije je samo vratiti $|M(a, b)|$. Za to, u algoritmu treba staviti `mjera = abs(b)`, umjesto `mjera = b`.

Najveća zajednička mjera (nastavak)

Može i ovako — s malo **manje** “teksta”:

```
int a, b, ostatak, mjera;
...
while (b != 0) {           // Ne: b > 0
    ostatak = a % b;
    a = b;
    b = ostatak;
}
mjera = a;                // mjera = abs(a);
```

Za $M(a, b) > 0$, na kraju treba staviti **$mjera = abs(a)$** .

Najveća zajednička mjera (nastavak)

Sporija varijanta za istu stvar, bez računanja ostataka, koristeći samo **oduzimanje**:

```
int a, b, mjera;
...
while (a != b)
    if (a > b)
        a -= b;
    else
        b -= a;
mjera = a;    /* Moze i b. */
```

Oprez! Ovo **radi** samo za **prirodne** brojeve a i b .

Zato je, na početku, dobro dodati $a = \text{abs}(a)$; $b = \text{abs}(b)$;

Potencija broja 2

Primjer. Program treba učitati prirodni broj n (tipa `unsigned int`) i naći odgovor na pitanje

• je li broj n potencija broja $d = 2$,

tj. može li se n prikazati u obliku

• $n = d^k$, s tim da je eksponent $k > 0$?

Za zadani faktor $d \geq 2$, svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ možemo jednoznačno prikazati u obliku

$$n = d^k \cdot m, \quad m \bmod d \neq 0, \quad \text{tj. } d \text{ ne dijeli } m,$$

gdje je $k \geq 0$ cijeli broj. **Dokažite!**

Slično rastavu na proste faktore, samo d ne mora biti prost.

Potencija broja 2 (nastavak)

Treba **naći** brojeve k i m u tom rastavu

$$n = d^k \cdot m, \quad m \bmod d \neq 0, \quad \text{tj. } d \text{ ne dijeli } m.$$

Ideja:

- Sve dok je n **djeljiv** s faktorom d — **podijelimo** ga s d .
- **Broj** ovih dijeljenja = eksponent $k \geq 0$.
- Na **kraju** tog postupka, ostaje nam baš m .

Dakle, n je **potencija** broja d , ako i samo ako

- na **kraju** vrijedi: $k > 0$ i $m = 1$.

Dijeljenje broja n s d radimo u **istoj** varijabli n , tako da je **konačna** vrijednost od $n = m$.

Potencija broja 2 (nastavak)

Bitni odsječak programa izgleda ovako:

```
unsigned int n, d = 2, k, odgovor;

k = 0;
    /* Sve dok je n djeljiv s d,
       podijeli ga s d. */
while (n % d == 0) {
    ++k;
    n /= d;
}

    /* Mora ostati n == 1. */
odgovor = n == 1 && k > 0;
```

Prikaz cijelog broja u računalu

Primjer. Program treba učitati **cijeli** broj **n** (tipa **int**) i napisati **prikaz** tog broja u računalu — kao niz **bitova**.

Broj bitova u prikazu **možemo** izračunati unaprijed, koristeći **sizeof** operator. Zato koristimo **for** petlju.

```
#include <stdio.h>

/* Prikaz cijelog broja u racunalu. */

int main(void)
{
    int nbits, broj, bit, i;
    unsigned mask;
```

Prikaz cijelog broja u računalu (nastavak)

```
    /* Broj bitova u tipu int. */  
    nbits = 8 * sizeof(int);  
  
    /* Pocetna maska ima bit 1  
       na najznacajnijem mjestu. */  
    mask = 0x1 << nbits - 1;  
  
    printf(" Upisi cijeli broj: ");  
    scanf("%d", &broj);  
    printf(" Prikaz broja %d:\n ", broj);
```

Prikaz cijelog broja u računalu (nastavak)

```
for (i = 1; i <= nbits; ++i) {
    /* Maskiranje odgovarajućeg bita. */
    bit = broj & mask ? 1 : 0;
    /* Ispis i blank nakon svaka 4 bita,
       osim zadnjeg. */
    printf("%d", bit);
    if (i % 4 == 0 && i < nbits) printf(" ");
    /* Pomak maske za 1 bit udesno. */
    mask >>= 1;
}
printf("\n");

return 0;
}
```

Prikaz cijelog broja u računalu (nastavak)

Za ulaz 3, dobivamo:

Prikaz broja 3:

0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0011

Za ulaz -3, dobivamo:

Prikaz broja -3:

1111 1111 1111 1111 1111 1111 1111 1101
