Uvod u računarstvo
7. predavanje

Saša Singer

singer@math.hr, web.math.hr/~singer

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Prikaz realnih brojeva — “floating–point” standard:
  - osnovni oblik “floating–point” prikaza — mantisa i eksponent,
  - greške zaokruživanja u prikazu,
  - pojam “jedinične greške zaokruživanja”,
  - IEEE standard — tipovi: single, double, extended.
- Greške zaokruživanja u aritmetici realnih brojeva:
  - greške zaokruživanja osnovnih aritmetičkih operacija, tzv. “katastrofalno” kraćenje,
  - “širenje” grešaka zaokruživanja, stabilni i nestabilni algoritmi,
  - primjeri izbjegavanja nestabilnosti.

Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

Prošli puta smo uveli operacije div (cjelobrojni kvocijent) i mod (ostatak) na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Definicija. Neka su $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{N}$ bilo koji brojevi, i neka su $q \in \mathbb{Z}$ (cjelobrojni kvocijent) i $r \in \mathbb{Z}_b$ (ostatak) jedinstveni brojevi za koje vrijedi

$$a = q \cdot b + r.$$

Operacije div i mod definiramo relacijama

$$a \ \mathrm{div}\ b := q \in \mathbb{Z}, \quad a \ \mathrm{mod}\ b := r \in \mathbb{Z}_b.$$

Za početak, uočite da su obje operacije definirane na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, a kodomene su različite.

Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

Sad nam treba proširenje na skup $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$,

- kad cjelobrojno dijelimo dva cijela broja (što, naravno, ima smisla),

da dobijemo cjelobrojno dijeljenje za cijele brojeve s predznakom $\mathbb{Z}_{2^n}^-$ (koji modeliraju $\mathbb{Z}$).

Naravno, ideja je ista kao i kod brojeva bez predznaka.

Cjelobrojno dijeljenje ili dijeljenje s ostatkom cijelih brojeva s predznakom je naprosto

- restrikcija odgovarajućih operacija div i mod.

Dakle, treba nam proširenje tih operacija na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Međutim, ne postoji dogovoreni standard za to proširenje.

Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

U većini programskih jezika (uključivo i C) vrijedi da

- stvar radi očekivano (prema Euklidovom teoremu) samo na skupu $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$.

Dakle, za nenegativne brojeve s predznakom dobivamo očekivane (i korektne) rezultate u cjelobrojnom dijeljenju.

A za negativne operande? Nije precizno definirano!

Na primjer, C standard (knjiga Kernighan, Ritchie) kaže:

- ako je barem jedan od dva operanda negativan, rezultat ovisi o implementaciji.

Dakle, nije predvidiv — isti program može davati različite rezultate, ovisno o računalu i izboru C compilera.
Zato — čitajte upute ili, naprosto, probajte!

Dijeljenje cijelih brojeva s predznakom

Eksperiment:

- test–program `divmod.c` (pokaži!),
- Intelov C++ compiler (verzija 9.0.025), na IA–32.

Rezultati $q = a \operatorname{div} b$ i $r = a \bmod b$ za $a = \pm 5$, $b = \pm 3$:

a	b	q	r
5	3	1	2
-5	3	-1	-2
5	-3	-1	2
-5	-3	1	-2

Operacije div i $\bmod$ interpretiramo na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Veza cjelobrojnog i običnog dijeljenja

Ključ za interpretaciju:

- kvocijent se uvijek "zaokružuje" prema nuli,

$$q = \operatorname{sign}\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left\lfloor \left| \frac{a}{b} \right| \right\rfloor,$$

- ostatak ima isti predznak kao i a.

$$r = \operatorname{sign}(a) \cdot (|a| \bmod |b|).$$

Za ostatak r ovdje vrijedi:

- $0 \leq r < |b|$, za $a \geq 0$,
- $-|b| < r \leq 0$, za $a < 0$.

Veza cjelobrojnog i običnog dijeljenja

Razlog: standardno ograničenje na ostatak $0 \leq r < b$, tj. $r \in \mathbb{Z}_b$, odgovara cijelim brojevima bez predznaka.

Međutim, kod brojeva s predznakom imamo i negativne brojeve, pa (možda) ima smisla dozvoliti da i ostaci budu negativni (u nekim slučajevima).

Prednosti ovakve "definicije" operacija div i mod na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:

- bez obzira na predznake od a i b,
- dobivamo iste apsolutne vrijednosti kvocijenta q i ostatka r,

tj. samo predznaci od q i r ovise o predznacima od a i b.

Ovo je i najčešća realizacija cjelobrojnog dijeljenja u praksi.

Cijeli brojevi s predznakom — sažetak

Ako imamo n bitova za prikaz brojeva, onda je skup svih prikazivih cijelih brojeva bez predznaka jednak

$$\mathbb{Z}_{2^n}^{-} = \{ -2^{n-1},\ -2^{n-1}+1,\ \ldots\ , -1,$$
$$0,\ 1,\ \ldots\ ,\ 2^{n-1}-2,\ 2^{n-1}-1 \}.$$

Za prikaz broja $B \in \mathbb{Z}_{2^n}^{-}$ vrijedi:

- nenegativni brojevi $B = 0, \ldots, 2^{n-1}-1$ imaju isti prikaz kao i bez predznaka,
- negativni brojevi $B = -1, \ldots, -2^{n-1}$ imaju isti prikaz kao i brojevi $2^n + B$ bez predznaka.

Cijeli brojevi s predznakom — sažetak

Osim toga, prikaz suprotnog broja $-B$ dobivamo tako da

- komplementiramo prikaz samog broja i dodamo 1 modulo 2^n.

Aritmetika cijelih brojeva s predznakom je modularna aritmetika modulo 2^n na sustavu ostataka $\mathbb{Z}_{2^n}^-$.

- To vrijedi za operacije $+$, $-$ i $\cdot$.

Operacije cjelobrojnog dijeljenja s ostatkom div i mod daju iste rezultate kao da dijelimo u $\mathbb{Z}$,

- ali treba provjeriti kako se dobiva proširenje ovih operacija s $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Cijeli brojevi — klasične greške

Primjer. Računanje $n!$ u cjelobrojnoj aritmetici. (Pokaži!)

Cijeli brojevi u C-u — sažetak

U programskom jeziku C:

- cijelim brojevima bez predznaka odgovara tip koji se zove `unsigned int`,
- cijelim brojevima s predznakom odgovara tip koji se zove `int`.

Ovi tipovi postoje u nekoliko raznih veličina

- standardna, `short`, `long`, a katkad i druge.

Razlike su u broju bitova n predviđenih za prikaz.

- Zapis konstanti (vrijednost, navođenje tipa).
- Zapis operacija $+$, $-$ i $\cdot$ znakovima $+$, $-$ i $*$.
- Zapis operacija div i mod znakovima $/$ i $\%$

Cijeli brojevi u C-u — sažetak

Primjer C programa za prikaz brojeva i čitanje brojeva.

Kod čitanja, pretvorba iz niza znakova (dekadske znamenke u dekadskom zapisu) u binarni zapis ide onim arimtetičkim pravilima koja odgovaraju TIPU broja (“Hornerov” algoritam).