

Uvod u računarstvo

14. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Operacije s nizovima podataka

Sadržaj predavanja

- Osnovne operacije s nizovima podataka (poljima):
 - Zbrajanje članova niza.
 - Najmanji (najveći) element u nizu.
- Pretraživanje i sortiranje nizova (polja):
 - Sekvencijalno pretraživanje.
 - Binarno pretraživanje sortiranog niza.
 - Sortiranje izborom ekstrema.

Zbroj svih članova niza

Zadan je niz (polje) od n realnih brojeva

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}.$$

Treba naći **zbroj** svih članova niza. Pretpostavka je $n \geq 0$.

Algoritam: (recimo da su x_i tipa **double**)

```
...
zbroj = 0.0;
for (i = 0; i < n; ++i)
    zbroj += x[i];
...
printf("Zbroj članova niza = %f.\n", zbroj);
```

Zbroj svih članova niza (nastavak)

Funkcija za zbrajanje:

```
double zbroj_clanova(int n, double x[]) {  
  
    int i;  
    double zbroj = 0.0;  
  
    for (i = 0; i < n; ++i)  
        zbroj += x[i];  
    return zbroj;  
}
```

Zbroj svih članova niza (nastavak)

Poziv funkcije:

```
int main(void) {  
  
    int n;  
    double v[] = {1.2, 2.6, 1.8, 4.4, 0.8};  
  
    printf("Zbroj svih članova niza = %f.\n",  
          zbroj_clanova(5, v) );  
  
    printf("Zbroj srednja tri člana niza = %f.\n",  
          zbroj_clanova(3, &v[1]) );  
}
```

Najmanji član niza

Tražimo najmanji član niza od n realnih brojeva

$$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}.$$

Pretpostavka je opet $n \geq 0$. Ovdje se koristi za korektnu inicijalizaciju.

Najmanji član niza

Algoritam: vrijednost i indeks (pozicija) najmanjeg elementa

```
min = x[0];
poz = 0;

for (i = 0; i < n; ++i)
    if (x[i] < min) {
        min = x[i];
        poz = i;
    }

...
printf("Najmanji član niza: x[%d] = %f.\n",
       poz, min);
```

Složenost: $n - 1$ usporedbi.

Pretraživanje i sortiranje

Sadržaj

- Pretraživanje i sortiranje nizova (polja):
 - Sekvencijalno pretraživanje.
 - Binarno pretraživanje sortiranog niza.
 - Sortiranje izborom ekstrema.

Sekvencijalno pretraživanje

- U općem obliku problem pretraživanja je ustanoviti nalazi li se zadani element `elt` među elementima (istog tipa) x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , tj. postoji li neki i takav da je

$$\text{elt} = x_i.$$

- Za početak želimo samo odgovor ima li takav element ili nema, tj. kao rezultat pretrage želimo samo logičku vrijednost `1 (istina)` ili `0 (laž)`.

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Pretraživanje se vrši sve dok su ispunjena **2 uvjeta**:

- **nismo našli** traženi element i
- **dok se indeks i nalazi unutar** zadanih granica 0 do $n - 1$.

Očito, potraga je završena (u najgorem slučaju) nakon točno jednog prolaza kroz sve elemente. Ona može završiti i prije, ako se traženi element nalazio negdje na početku niza.

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 55.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 55.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 0`

`x[0] != 55`

`nasli = 0`

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 55.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 1`

`x[1] != 55`

`nasli = 0`

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 55.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 2`

`x[2] == 55`

`nasli = 1`

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 0`

`x[0] != 21`

`nasli = 0`

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 1`

`x[1] != 21`

`nasli = 0`

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 2`

`x[2] != 21`

`nasli = 0`

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitate nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



$i = 3$

$x[3] \neq 21$

$nasli = 0$

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



$i = 4$

$x[4] \neq 21$

$nasli = 0$

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



$i = 5$

$x[5] \neq 21$

$nasli = 0$

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 6`

`x[6] != 21`

`nasli = 0`

Sekvencijalno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U polju od 7 elemenata ispitajte nalazi li se broj 21.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

Binarno pretraživanje

Ako imamo **sortiranu listu** elemenata, potraga se može ubrzati. Zamislite potragu (po prezimenu) u telefonskom imeniku velegrada. Kako bismo to proveli?

- Otvorili bismo imenik na nekom mjestu. Ako je traženo prazime ispred prezimena na otvorenom mjestu, onda bismo postupak ponovili s prvim dijelom imenika, a ako je iza, onda s drugim dijelom imenika.

Pitanje je gdje je to neko mjesto? Vratimo se na apstraktni model.

Binarno pretraživanje (nastavak)

Za naše elemente vrijedi

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_i \leq \dots \leq x_{n-2} \leq x_{n-1},$$

pri čemu je x_i odabrani objekt koji ćemo usporediti s elementom **elt**.

Kako ne znamo koji su elementi u listi, listu je najbolje podijeliti “**na pola**” jer je podjednako vjerojatno da se **elt** nalazi u prvom/drugom dijelu. U tom slučaju, bez obzira gdje se nalazi, potragu smo smanjili na podlistu **s polovičnim** brojem elemenata.

Binarno pretraživanje (nastavak)

Precizno, neka je $l = 0$ indeks prvog, a $d = n - 1$ indeks zadnjeg elementa u nizu. Srednji element i ima indeks

$$i = \left\lfloor \frac{l + d}{2} \right\rfloor \quad \text{ili} \quad i = \left\lceil \frac{l + d}{2} \right\rceil.$$

Budući da **cjelobrojnim dijeljenjem** u C-u dobijemo prvi izbor, onda se obično on koristi kao “sredina”.

Elemente niza x svrstali smo u **3 skupine**:

- elementi s indeksima 0 do $i - 1$,
- element s indeksom i ,
- elementi s indeksima $i + 1$ do n .

Binarno pretraživanje (nastavak)

Postavljamo 3 pitanja:

- $\text{elt} < x_i?$ što znači da nastavljamo tražiti na podnizu s indeksima $l = 0$ do $d = i - 1$,
- $\text{elt} > x_i?$ što znači da nastavljamo tražiti na podnizu s indeksima $l = i + 1$ do $d = n - 1$,
- $\text{elt} = x_i?$ što znači da smo pronašli traženi element.

Potruga traje sve dok:

- nismo našli traženi element i
- vrijedi $l \leq d$ jer u protivnom nemamo više elemenata za potragu.

Binarno pretraživanje (nastavak)

Koliko traje najdulja potraga (ako element nismo našli).

- nakon 1. podjele duljina niza za potragu je $\leq \frac{n}{2}$
- nakon 2. podjele duljina niza za potragu je $\leq \frac{n}{4}$
- nakon k . podjele duljina niza za potragu je $\leq \frac{n}{2^k}$.

Zadnji smo prolaz napravili kad je

$$\frac{n}{2^k} < 1,$$

dakle $n < 2^k$, odnosno $k > \log_2 n$. Pritom stajemo za **najmanji** takav k .

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 55.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

↑
l = 0

nasli = 0

↑
d = 6

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 55.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

↑
l = 0

↑

↑
d = 6

$$i = (l + d) / 2 = 3$$

$$x[3] < 55$$

$$\text{nasli} = 0$$

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 55.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

$l = 1$ $d = 6$

$$i = (1 + 6) / 2 = 5$$

$$x[5] > 55$$

$$\text{nasli} = 0$$

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 55.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----



```
i = l = d = 4
```

```
x[4] == 55
```

```
nasli = 1
```

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 21.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

↑
l = 0

nasli = 0

↑
d = 6

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 21.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

$l = 0$



$d = 6$

$$i = (l + d) / 2 = 3$$

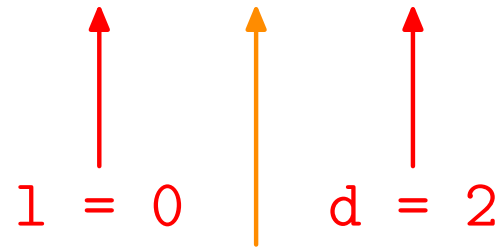
$$x[3] > 21$$

$$\text{nasli} = 0$$

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 21.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----



$$i = (l + d) / 2 = 1$$

$$x[1] < 21$$

$$\text{nasli} = 0$$

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 21.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----



`i = l = d = 2`

`x[2] > 21`

`nasli = 0`

Binarno pretraživanje (nastavak)

Primjer. U sortiranom polju ispitajte nalazi li se broj 21.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

$(d = 1) < (1 = 2)$

Sortiranje izborom ekstrema

Na početku algoritma imamo nesređeni niz, tj. indeks prvog elementa u nesređenom dijelu je 0 . Algoritam uzlaznog sortiranja (izborom ekstrema) ima dva “građevna bloka”:

- Za $i = 0$ do $i < n - 1$ ponavljaj:
 - U nesređenom dijelu niza nađi **najmanji** element.
 - Najmanji element zamijeni s **prvim elementom** nesređenog dijela niza. Ovim korakom nesređeni dio niza se smanjio za 1 – tj. prvi element nesređenog dijela niza ima indeks $i + 1$.

Sortiranje izborom ekstrema

“Građevni blok”: u nesređenom dijelu niza nađi **najmanji** element.

- Trenutno najmanji element u nesređenom dijelu je prvi element. Njegova indeks je $\text{ind_min} = i$, a vrijednost $x_{\text{ind_min}} = x_i$.
- Za elemente $j = i + 1$ do $j = n - 1$ ispitaj je li $x_{\text{ind_min}} > x_j$. Ako je, zapamti novu minimalnu vrijednost $x_{\text{ind_min}} = x_j$ i novi indeks minimalnog elementa $\text{ind_min} = j$.

Sortiranje izborom ekstrema

“Građevni blok”: ako je $\text{ind_min} \neq i$ vrši se zamjena prvi elementa nesređenog dijela i minimalnog elementa korištenjem pomoćne varijable temp .

- $\text{temp} = x_i$

- $x_i = x_{\text{ind_min}}$

- $x_{\text{ind_min}} = \text{temp}.$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)


Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----


`i = 0`

`x_min = x[0] = 42`

`ind_min = 0`

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$
 $j = 1$

$x_{\min} = x[1] = 12$

$ind_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 2$

$x_{\min} < x[2] = 55$

$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$

$\text{ind}_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 4$

$x_{\min} < x[4] = 18$


$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)


Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$



$j = 5$



$x_{\min} < x[5] = 44$

$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 0$

$j = 6$

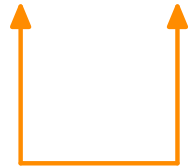
$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 1`

`x_min = x[1] = 42`

`ind_min = 1`

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$
 $j = 2$

$x_{\min} < x[2] = 55$

$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$

$\text{ind_min} = 1$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 4$

$x_{\min} = x[4] = 18$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$\text{ind_min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 1$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	42	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----



$i = 2$

$x_{\min} = x[2] = 55$

$ind_{\min} = 2$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$
 $j = 3$

$x_{\min} < x[3] = 94$

$\text{ind}_{\min} = 2$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 4$

$x_{\min} = x[4] = 42$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 5$

$x_{\min} < x[5] = 44$

$\text{ind_min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 2$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	55	94	42	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```

```
x[ind_min] = temp
```


Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----



`i = 3`

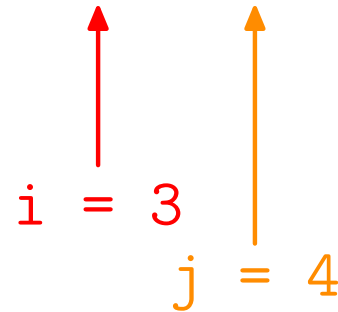
`x_min = x[3] = 94`

`ind_min = 3`

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----



$$x_{\min} = x[4] = 55$$

$$\text{ind}_{\min} = 4$$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$j = 5$

$x_{\min} = x[5] = 44$

$\text{ind}_{\min} = 5$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 3$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 5$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	94	55	44	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
x[i] = x[ind_min]
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



$i = 4$

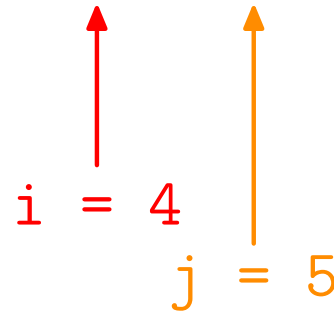
$x_{\min} = x[4] = 55$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



$x_{\min} < x[5] = 94$

$\text{ind}_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 4$

$j = 6$

$x_{\min} < x[6] = 67$

$ind_{\min} = 4$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 5$

$x_{\min} = x[5] = 94$

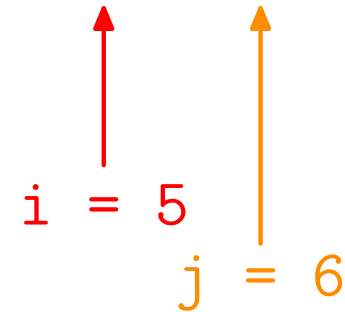
$ind_{\min} = 5$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----

$i = 5$
 $j = 6$



$x_{\min} = x[6] = 67$

$ind_{\min} = 6$

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	94	67
----	----	----	----	----	----	----



```
temp = x[i]
```

```
x[i] = x[ind_min]
```


```
x[ind_min] = temp
```

Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----

$i = 6$



Sortiranje izborom ekstrema (nastavak)

Primjer. Sortirajte izborom ekstrema zadano polje.

12	18	42	44	55	67	94
----	----	----	----	----	----	----