

# *Programiranje 2*

## *3. predavanje*

Saša Singer

[singer@math.hr](mailto:singer@math.hr)

[web.math.hr/~singer](http://web.math.hr/~singer)

PMF – Matematički odjel, Zagreb

# *Sadržaj predavanja*

- Funkcije (kraj):
  - Rekurzivne funkcije (nastavak):
    - Particije.
    - Hanojski tornjevi.
- Struktura programa (prvi dio):
  - Blokovska struktura jezika.
  - Doseg varijable — lokalne i globalne varijable.
  - Vijek trajanja varijable, memorijske klase.
  - Program smješten u više datoteka. Vanjski simboli.

# *Informacije*

Praktični kolokvij (prvi krug) — ide prema najavi:

- održat će se 4. i 5. tjedan nastave,
- dakle, 26. 3. — 5. 4., bez prvog utorka,
- subote su namjerno uključene.

Popis s terminima je na vratima moje sobe.

- Zapišite (prijavite) se što prije — ako već niste!

# Rekurzivne funkcije

# *Sadržaj*

- Funkcije (kraj):
  - Rekurzivne funkcije (nastavak):
    - Particije.
    - Hanojski tornjevi.

# Particije prirodnog broja

## *Particije — definicija*

Particija (ili rastav) prirodnog broja  $n \in \mathbb{N}$  je bilo koji **rastav** zadalog broja

- u **zbroj pibrojnika** koji su, također, **prirodni brojevi**,
- pri čemu **poredak** pibrojnika **nije bitan**.

Dakle, particija od  $n$  ima oblik

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

gdje je

- $m \in \mathbb{N} =$  **broj** pibrojnika u rastavu,
- $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$  su **pibrojnici**.

# *Particije — zapis i broj*

Obzirom na to da **poredak** pribrojnika **nije bitan**, tj.,

- dva rastava smatramo **istim** ako imaju **iste** pribrojнике, **bez obzira** na njihov **poredak**,

onda u **zapisu** možemo smatrati da su pribrojnici **poredani** — recimo, **nepadajuće** (ili **nerastuće**)

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m.$$

Zanimljivo je pronaći na **koliko** (različitih) načina se  **$n$**  može ovako zapisati (rastaviti).

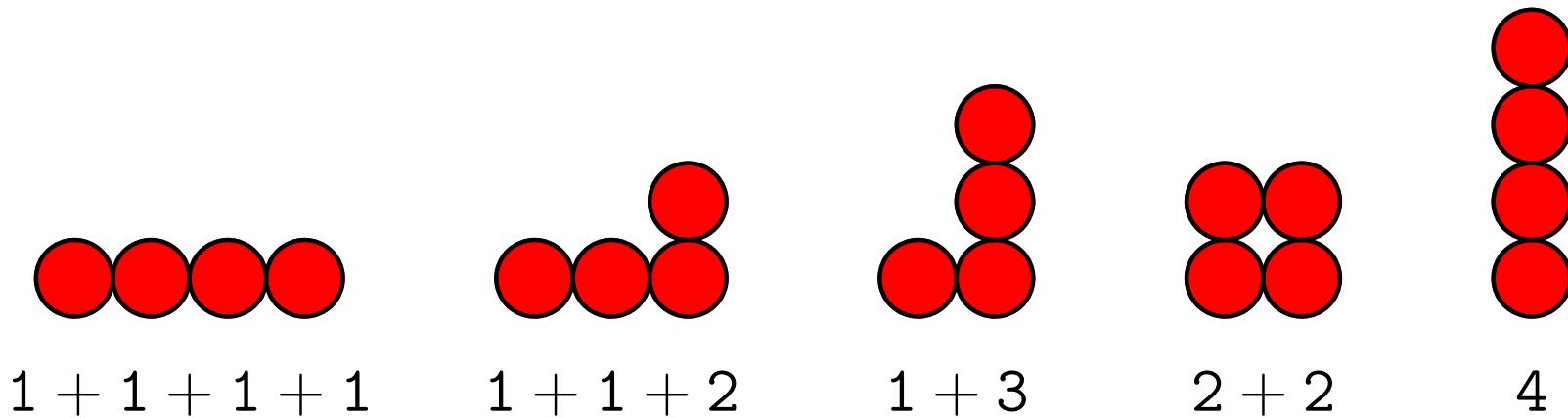
- Broj particija od  **$n$**  označavamo s  **$p(n)$** .

Uočite da **broj** pribrojnika  **$m$**  može biti **bilo koji** (nije zadan).

## *Broj particija — zadatak*

**Primjer.** Napišimo program koji učitava prirodni broj  $n$  i ispisuje **broj particija**  $p(n)$  = broj rastava broja  $n$  u zbroj nepadajućih prirodnih brojeva.

Pokažimo koliko je takvih particija za  $n = 4$ .



Dakle, **broj particija** je  $p(4) = 5$ .

## *Broj particija — ideja za rješenje*

Trenutno, osim definicije, **ne znamo** ništa više o  $p(n)$ . Stoga je prirodna ideja za rješenje:

- generiraj, nekim redom, sve particije od  $n$  i izbroji ih.

**Napomena.** Ako tražimo samo **broj** particija  $p(n)$ , onda postoje i **puno bolji** načini za njegovo nalaženje (rekurzivne relacije i sl).

Bez obzira na to, idemo **realizirati** gornju ideju, kao da je zadatak upravo

- generiranje svih particija od  $n$ .

# *Generiranje particija — razrada*

Kako ćemo generirati sve particije od  $n$ ?

- Pa, ..., nekim redom, jednu po jednu.

A kako bismo generirali jednu (neku) particiju od  $n$ ?

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m.$$

To je već lakše:

- pribrojnik po pribrojnik, jedan za drugim,
- pazeći da pribrojnici ne padaju.

Dakle, “izaberi”  $a_1$ , pa  $a_2$ , i tako redom.

Ako još pojedine pribrojнике  $a_\ell$  “vrtimo” u petlji (po dozvoljenim vrijednostima), dobit ćemo i sve particije od  $n$ .

# *Generiranje particija — razrada (nastavak)*

Ima samo jedan **problem**:

- broj pribrojnika  $m$  može **varirati** od 1 do  $n$ ,  
pa **nema šanse** da to napravimo “hrpom petlji” — jedna u drugoj (“broj petlji” **varira**).

Taj problem možemo riješiti **rekurzivnom** funkcijom. **Ideja**:

- Svaki poziv funkcije “**vrti**” samo **jednu** petlju — za svaki pojedini pribrojnik (onaj  $a_\ell$ ).

**Rekurzivni** pozivi realiziraju “petlje u petlji”.

Naravno, **nije** baš očito kako bismo to trebali **napraviti**. Zato,

- krenimo od početka — **prvog** pribrojnika  $a_1$ ,
- a onda — korak po korak (kao u **indukciji**).

# Generiranje particija — prvi pribrojnik

Kako izabrati i “vrtiti” prvi pribrojnik  $a_1$ ?

Zapišimo prvi korak u obliku:

$$n = a_1 + \text{“preostala suma”},$$

gdje “preostala suma” predstavlja zbroj preostalih pribrojnika  $a_2 + \dots + a_m$ , ako ih ima.

- Pribrojnik  $a_1$  možemo “vrtiti” u petlji od 1 do  $n$  — sve ove vrijednosti su dozvoljene.

Za svaku fiksnu vrijednost  $a_1 = i$  znamo da mora biti

$$\text{“preostala suma”} = n - i,$$

zato da ukupna suma bude zadani  $n$ .

## *Generiranje particija — skica koraka*

I što sad, kad smo izabrali  $a_1 = i$ ?

- Preostaje nam problem da “preostala suma”  $= n - i$  opet rastavimo u zbroj pribrojnika ( $a_2 + \dots + a_m$ ).

Dakle, **rekurzija** se **nazire**.

- Zadana je **tražena suma** koju želimo dobiti — to će biti **ulazni** argument funkcije, zovimo ju **generiraj**.
- Na početku, u **prvom** koraku znamo (**tražimo**) da je **suma**  $= n$ . To će biti **stvarni** argument u **vanjskom** pozivu funkcije.
- Funkcija **generiraj(suma)** “vrti” **sljedeći** pribrojnik, zovimo ga **i**, u **petlji** od **1** do **suma**
  - i zove samu sebe u obliku **generiraj(suma - i)**.

## *Generiranje particija — greška u koraku*

Ali, oprez! Ovo je pogrešno, jer ne osigurava da pibrojnici ne padaju. Na primjer,

- fali nam uvjet  $a_1 = i \leq a_2$  u prvom koraku.

Gdje je greška u razmišljanju?

Vratimo se na prvi korak. Kad izabremo pibrojnik  $a_1 = i$ ,

- preostaje nam problem da suma – i opet rastavimo u zbroj pibrojnika ( $a_2 + \dots + a_m$ ).

Ali, taj “opet” nije isti problem kao i polazni!

- Ovom “novom” problemu moramo reći (zadati) od koje vrijednosti smije krenuti sljedeći pibrojnik (to je  $a_2$  u prvom koraku).

Nazovimo tu vrijednost prvi.

# **Generiranje particija — popravak koraka**

Potpuno isto vrijedi i u općem koraku!

- Funkcija generiraj mora dobiti još jedan ulazni argument prvi. To je polazna vrijednost za sljedeći pibrojnik (a ne 1).

Ovo je tzv. parametrizacija rekurzije.

Popravljena rekurzija ima sljedeći oblik:

- funkcija generiraj(suma, prvi) “vrti” sljedeći pibrojnik i u petlji od prvi do suma
  - i zove samu sebe u obliku generiraj(suma - i, i).

Pripadni problem je: “generiraj sve particije broja suma u kojima prvi (najmanji) pibrojnik mora biti veći ili jednak broju prvi”.

## *Generiranje particija — popravak prvog poziva*

Sad treba polazni problem “uložiti” u ovaj rekurzivni, tj. treba popraviti vanjski (prvi) poziv (podesiti stvarne argumente).

No, to je lako.

- U prvom koraku tražimo da je  $\text{suma} = n$ , a prvi pribrojnik smije početi od 1.

To će biti stvarni argumenti u vanjskom pozivu funkcije.

Dakle, vanjski poziv je generiraj(n, 1).

# *Generiranje particija — kraj rekurzije*

Ne zaboravimo: svaku rekurziju moramo nekako zaustaviti (prekinuti).

Naša rekurzija `generiraj(suma, prvi)` radi sljedeće:

- “generira sve particije broja `suma` u kojima prvi pribrojnik mora biti veći ili jednak broju `prvi`”.

Stvarno, a kad smo **gotovi**?

Odgovor: onda kad više **nemamo** što rastaviti!

- Ako je `suma  $\geq$  1`, onda “ima posla”.
- Međutim, ako je `suma = 0`, onda smo **gotovi** — rastav je **završen**.

Ako još uočimo da **uvijek** vrijedi `suma  $\geq$  0`, sve je “čisto”.

Razlog: u **petlji** u rekurziji je `i  $\leq$  suma`!

# *Generiranje particija — korektnost rekurzije*

Preciznije, vrijedi i **jača** relacija:

$$1 \leq \text{prvi} \leq i \leq \text{suma}.$$

To direktno izlazi “kôda” funkcije:

- funkcija `generiraj(suma, prvi)` “vrti” sljedeći pribrojnik `i` u petlji od `prvi` do `suma`
  - i zove samu sebe u obliku `generiraj(suma - i, i)`.

Iz gornje relacije je očito

$$0 \leq \text{suma} - i < \text{suma}.$$

To znači da rekurzivni pozivi funkcije `generiraj` strogo smanjuju prvi argument `suma`, pa se rekurzija **sigurno** prekida kad `suma` padne na `0` (tzv. **korektnost** rekurzije).

# *Generiranje particija — brojanje*

Vratimo se početnom problemu — **brojanju** particija.

No, to je sad lako. U **generiraj** treba samo dodati **brojanje** generiranih particija.

- Zamjena posla: **generiraj**  $\mapsto$  **prebroji**.

Pripadni problem je:

- “**prebroji** **sve** particije broja **suma** u kojima prvi (najmanji) pribrojnik mora biti **veći ili jednak** broju **prvi**”.

Realizacija je funkcija **particije(sum, prvi)**

- koja **vraća** **broj** svih takvih particija!

# *Generiranje particija — brojanje (nastavak)*

Što točno radi `particije`(`suma`, `prvi`)?

- Ima **brojač** takvih particija, zovimo ga **broj**, kojeg inicijaliziramo na **0**,
- “vrati” **sljedeći** pribrojnik **i** u **petlji** od **prvi** do **suma**
  - i **zbraja** vrijednosti koje vrate rekurzivni pozivi `particije`(`suma - i`, `i`).

I sad **oprez!** Što **radimo** kad **prekidamo** rekurziju?

- **Vratimo** vrijednost **1**, jer to znači da smo tog trena “izgenerirali” jednu od traženih particija.

## *Generiranje particija — brojanje (nastavak)*

Matematički rečeno, imamo **rekurzivne** relacije

$$\text{particije}(\text{suma}, \text{prvi}) = \sum_{i=\text{prvi}}^{\text{suma}} \text{particije}(\text{suma} - i, i).$$

s tim da je “**na dnu**”

$\text{particije}(0, \text{prvi}) = 1$ , za bilo koji **prvi**,  
a “**na vrhu**” (za vanjski poziv — ono što tražimo)

$$p(n) = \text{particije}(n, 1).$$

Ha!

# *Broj particija — funkcija*

```
#include <stdio.h>

int particije(int suma, int prvi)
{
    int i, broj = 0;

    if (suma == 0) return 1;
    /* else */
    for (i = prvi; i <= suma; ++i)
        /* Rekursivni poziv -
           dodavanje sljedeceg pribrojnika */
        broj += particije( suma - i, i ) ;
    return broj;
}
```

## *Broj particija — glavni program*

```
int main(void)
{
    int n;

    printf(" Upisi prirodni broj n: ");
    scanf("%d", &n);

    printf("\n Broj particija p(%d) = %d\n",
           n, particije(n, 1) );

    return 0;
}
```

## *Broj particija — trag poziva*

“Trag poziva” možemo dobiti tako da na vrh funkcije dodamo ispis ulaznih vrijednosti.

---

```
int particije(int suma, int prvi)
{
    int i, broj = 0;

    printf("  suma = %d, prvi = %d\n", suma, prvi);
    if (suma == 0) return 1;
    for (i = prvi; i <= suma; ++i)
        broj += particije( suma - i, i ) ;
    return broj;
}
```

---

## *Broj particija — trag poziva za $n = 4$*

---

suma = 4, prvi = 1 (vanjski)

suma = 3, prvi = 1 1

suma = 2, prvi = 1 1+1

suma = 1, prvi = 1 1+1+1

suma = 0, prvi = 1 -> 1+1+1+1

suma = 0, prvi = 2 -> 1+1+2

suma = 1, prvi = 2 1+2

suma = 0, prvi = 3 -> 1+3

suma = 2, prvi = 2 2

suma = 0, prvi = 2 -> 2+2

suma = 1, prvi = 3 3

suma = 0, prvi = 4 -> 4

Broj particija  $p(4) = 5$

---

## *Particije — malo priče*

Inačе, broj particija  $p(n)$  broja  $n$  može se dobiti i analitički, tako da se u formalnom redu

$$\begin{aligned} & (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ & \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots) \\ & \cdot (1 + x^3 + x^6 + \dots) \\ & \cdot (1 + x^4 + x^8 + \dots) \dots \\ & = 1 + p(1)x + p(2)x^2 + \dots \end{aligned}$$

očita koeficijent uz  $x^n$ .

Na primjer, za  $n = 100$  je  $p(100) = 190\,569\,292$ .

# *Particije — varijacije problema*

Zadatak. Za zadani  $n \in \mathbb{N}$  treba ispisati sve particije broja  $n$ .

Uputa za rješenje. Pribrojnice treba spremati u neko polje (idealno je globalno i dinamički alocirano).

Do sada smo tražili broj particija  $p(n)$  uz osnovni uvjet da u rastavu

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

pribrojnici ne moraju biti različiti. Tako smo došli do uvjeta

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m.$$

# Particije — varijacije problema

U rastavu

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

na pribrojnice možemo postavljati različite dodatne uvjete (i dalje poredak pribrojnika **nije bitan**). Na primjer:

- svi pribrojnici su **različiti**,  $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$ ,
- **razlika** susjednih pribrojnika je **najmanje  $k$** ,  $a_\ell + k \leq a_{\ell+1}$ ,
- u rastavu ima **točno  $k$**  pribrojnika.  $m = k$  je zadan.

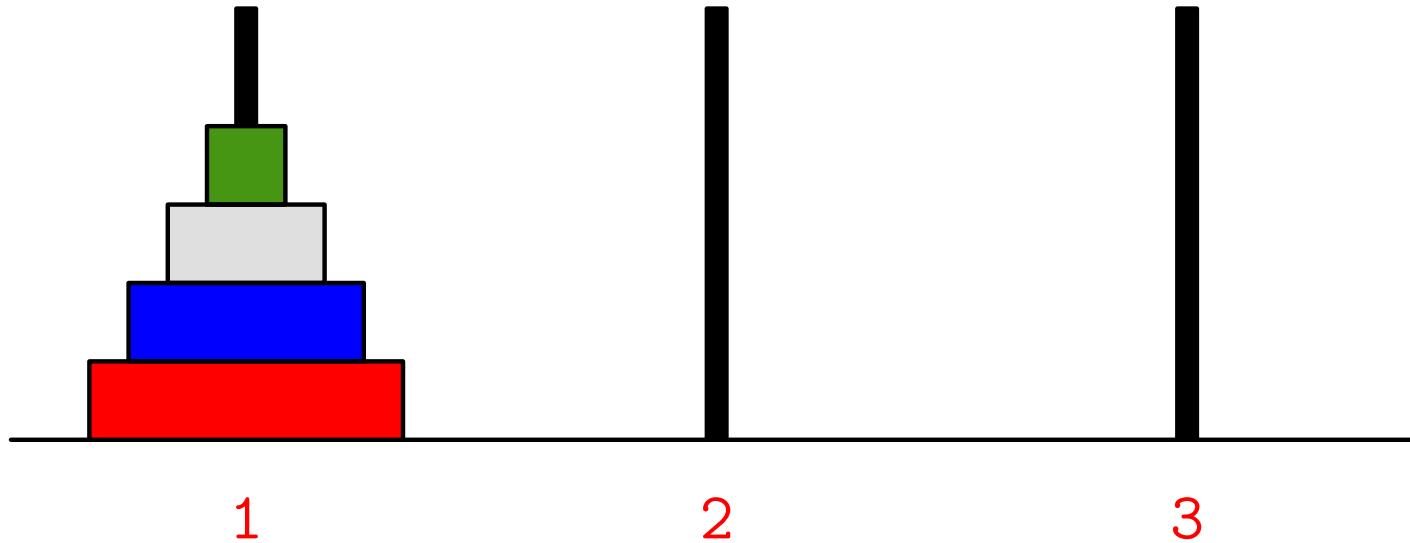
Što treba **promijeniti** u našoj funkciji da dobijemo **broj** svih **odgovarajućih** particija?

# Hanojski tornjevi

# Hanojski tornjevi

Primjer. Na štalu 1 nalazi se  $n$  diskova međusobno različitih veličina, poslaganih sortirano od najvećeg prema najmanjem (odozdo prema gore). Imamo još dva prazna štapa 2 i 3.

Na sljedećoj slici je primjer za  $n = 4$ .



## Hanojski tornjevi — zadatak

Zadatak. Treba preseliti sve diskove sa štapa 1 na štap 3 u minimalnom broju poteza, korištenjem pomoćnog štapa 2.

U prebacivanju diskova s jednog štapa na drugi treba poštovati sljedeća “pravila igre”:

- u svakom potezu može se prebaciti samo jedan disk (najgornji),
- veći disk nikada se ne smije staviti iznad manjeg diska,
- manji (najgornji) disk se smije preseliti iznad bilo kojeg većeg diska na nekom drugom štапу, ili na prazan štap.

Dakle, prebacujemo “jedan po jedan” disk i smije samo manji na veći (ili na “ništa”).

# Hanojski tornjevi — razrada problema

Za početak, nije očito da problem uopće ima rješenje.

Uočiti da je prebacivanje jednog (najgornjeg) diska

- s nekog štapa (zovimo ga odakle),
- na neki drugi štap (zovimo ga kamo),

upravo = osnovni potez, kojeg uvijek znamo napraviti.

Ideja: svesti problem za  $n$  diskova

- na isti problem za malo manje diskova,
- koristeći osnovni potez za neki disk (ili neke diskove).

Dakle, želimo (rekurzivno) smanjivati  $n$ , dok ne dođemo do  $n = 1$ , a to opet znamo napraviti (osnovni potez).

# Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)

Ključno pitanje je:

- kojih  $n$  diskova treba izabrati, sad kad će  $n$  varirati?

Traži se tzv. parametrizacija rekurzije — da zaista dobijemo isti problem s manjim brojem diskova).

Odgovor: najgornjih  $n$  na polaznom štapu — jer samo do njih možemo doći!

Problem hanojskih tornjeva za gornjih  $n$  diskova svodi se na:

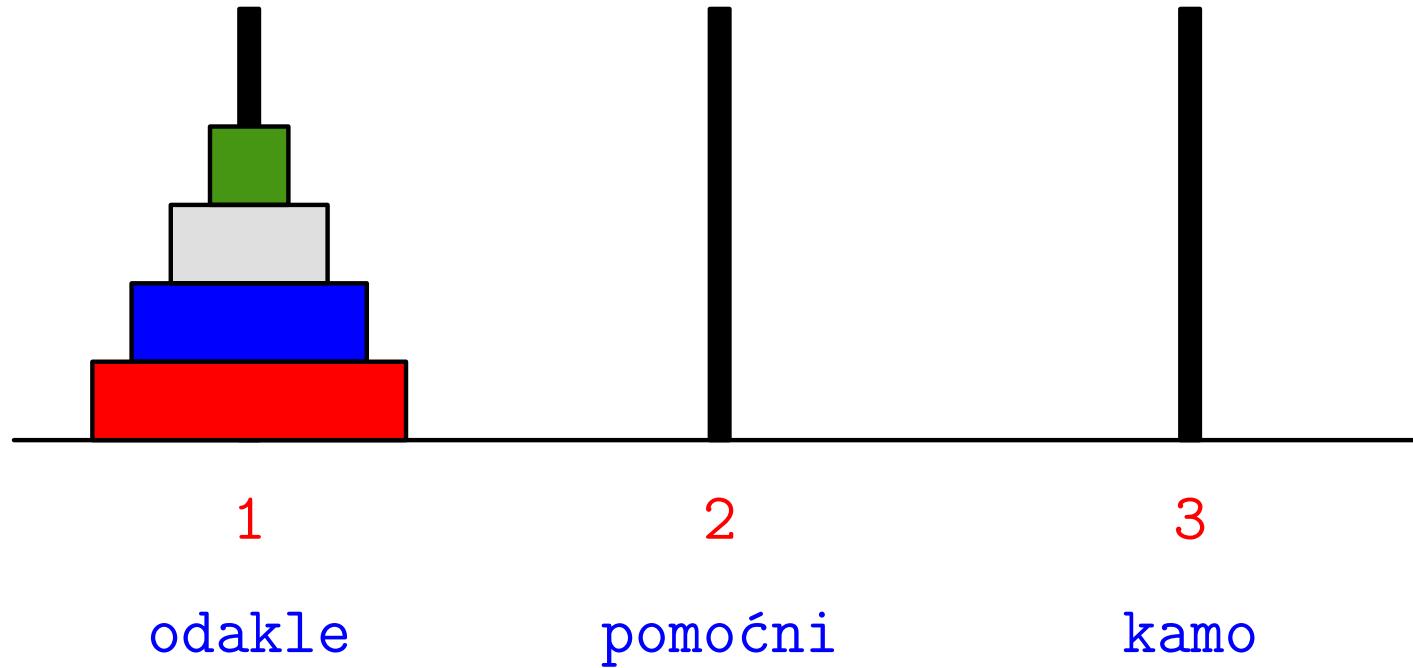
- prebaci gornjih  $n - 1$  diskova na pomoćni štap,
- prebaci jedan disk na odredišni štap — to je najdonji(!) disk od polaznih  $n$ ,
- prebaci onih gornjih  $n - 1$  diskova s pomoćnog na odredišni štap.

# *Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)*

Grafički, to izgleda ovako:

1. korak:

$n = 4$ , prebaci gornja 3 na pomoćni

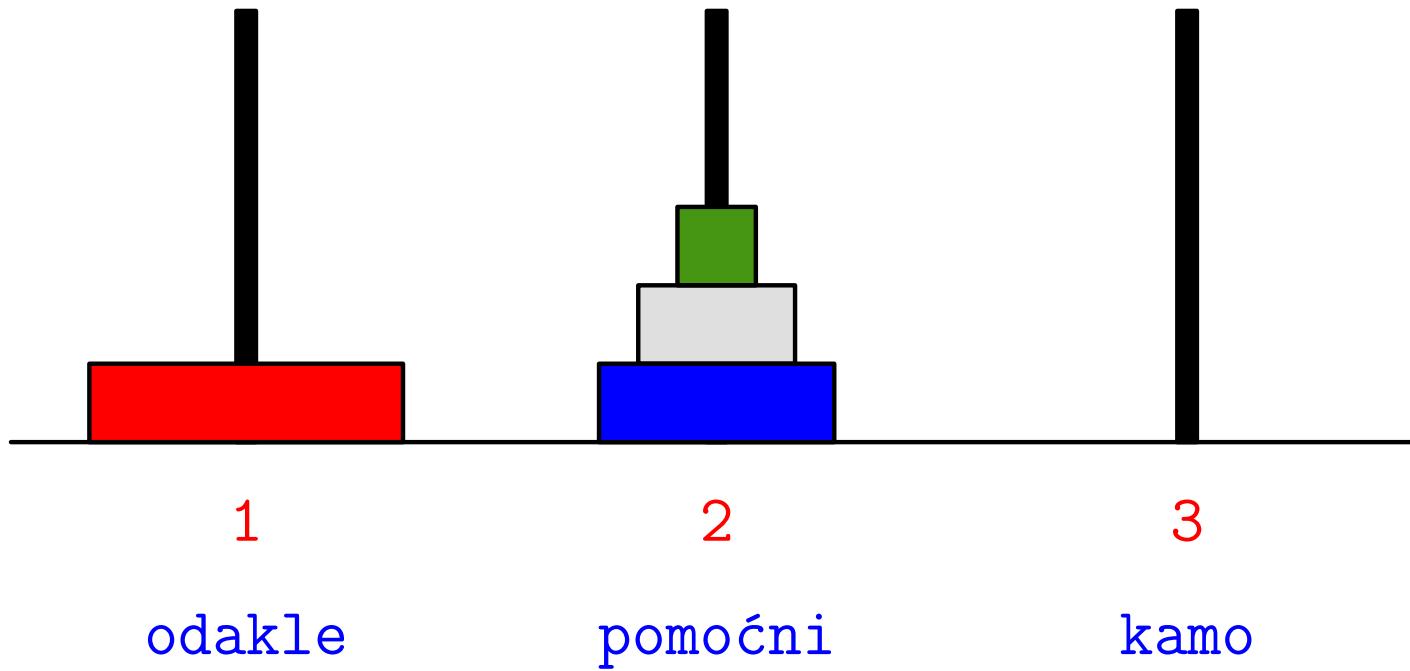


# *Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)*

Grafički, to izgleda ovako:

2. korak:

prebaci najveći na kamo

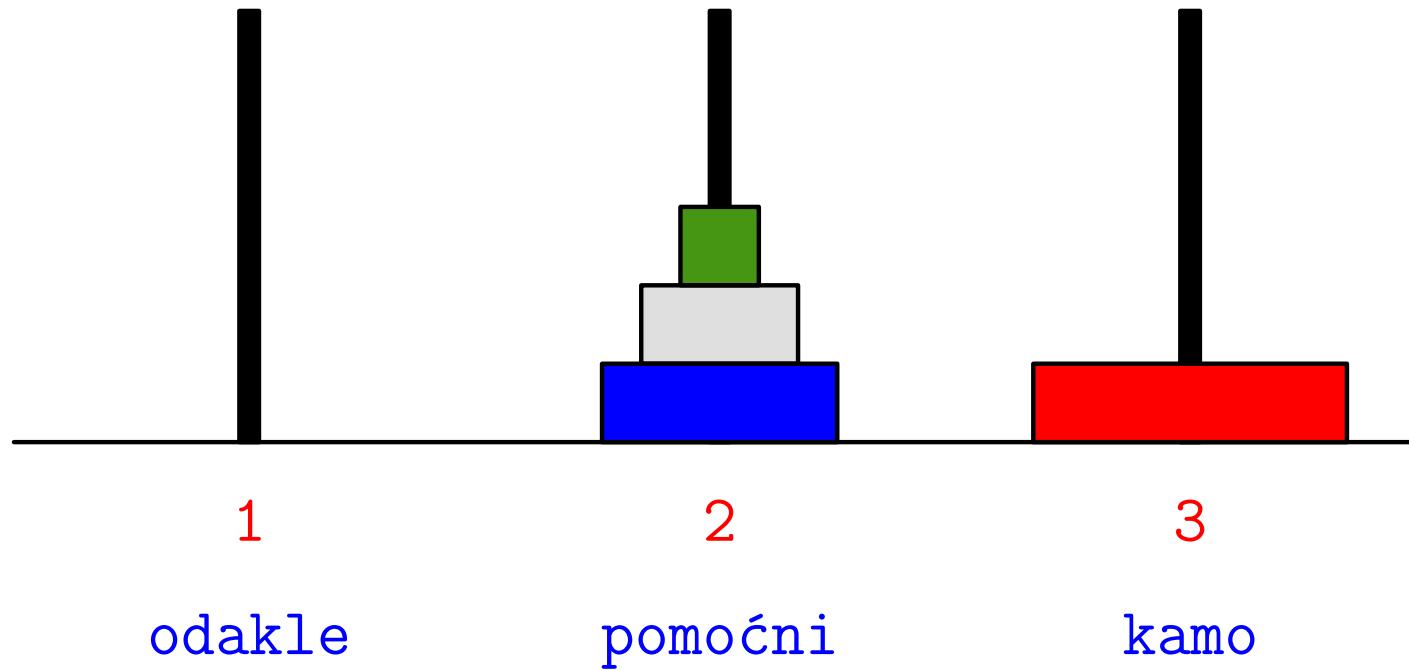


# *Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)*

Grafički, to izgleda ovako:

3. korak:

prebaci gornja 3 na kamo

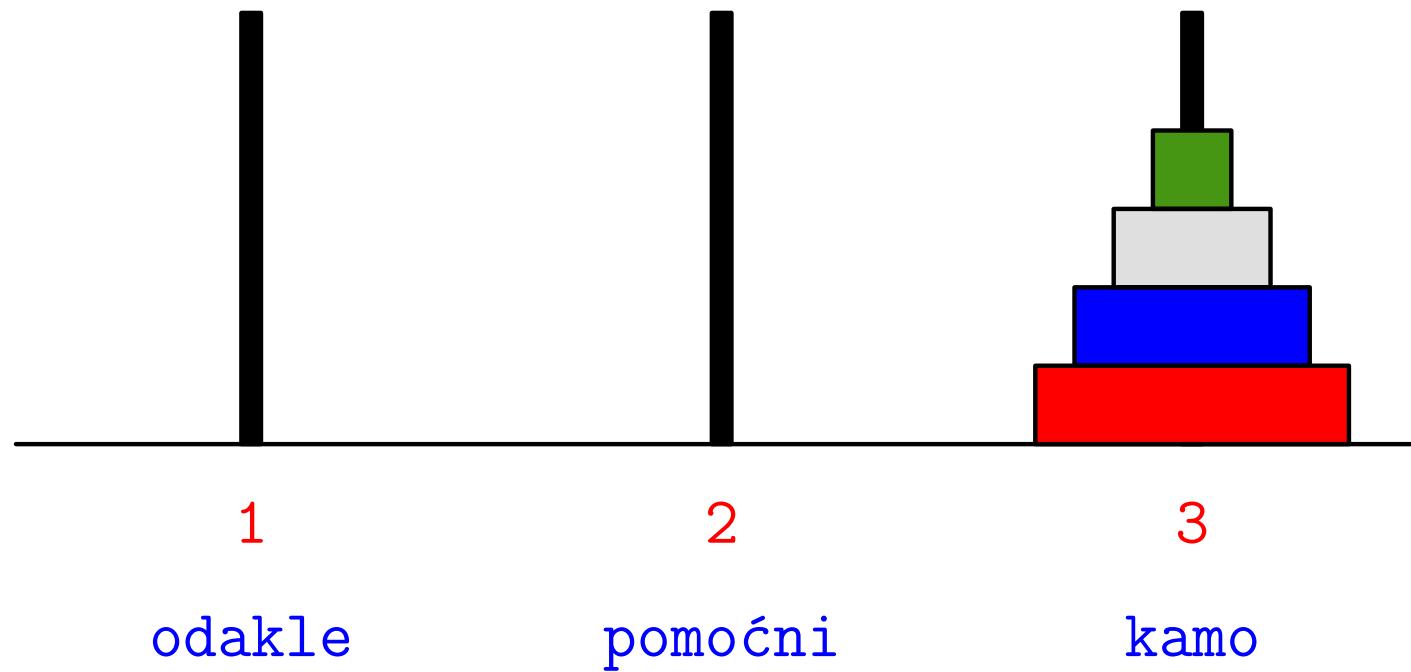


# *Hanojski tornjevi — razrada (nastavak)*

Grafički, to izgleda ovako:

Nakon 3. koraka:

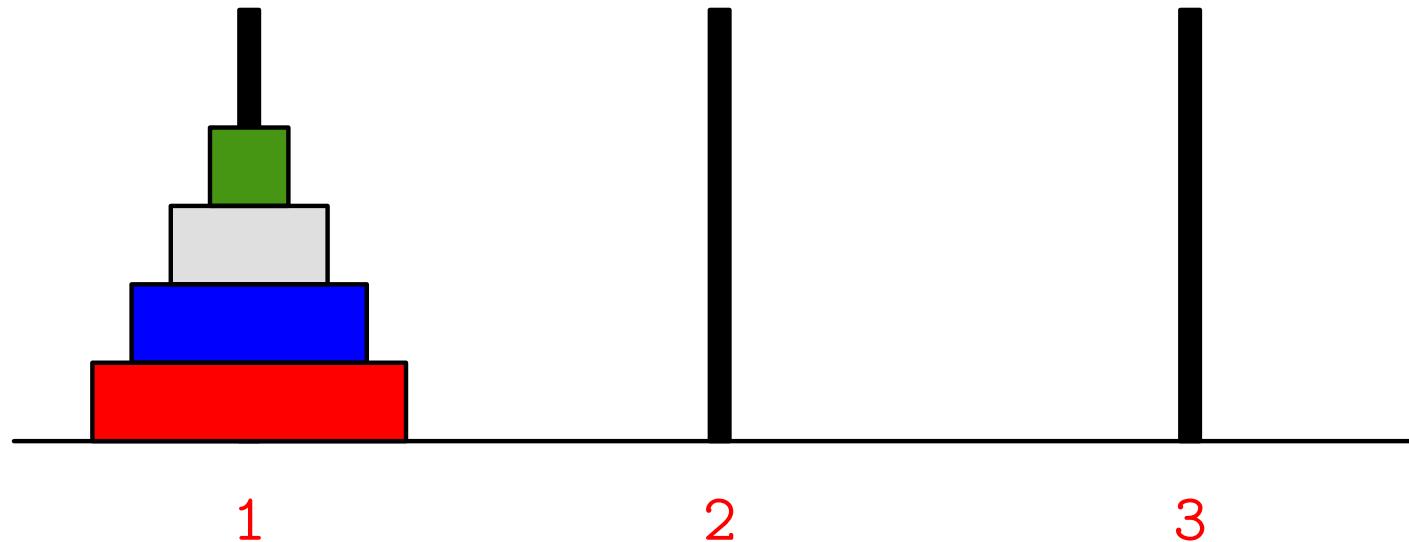
gotovo



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

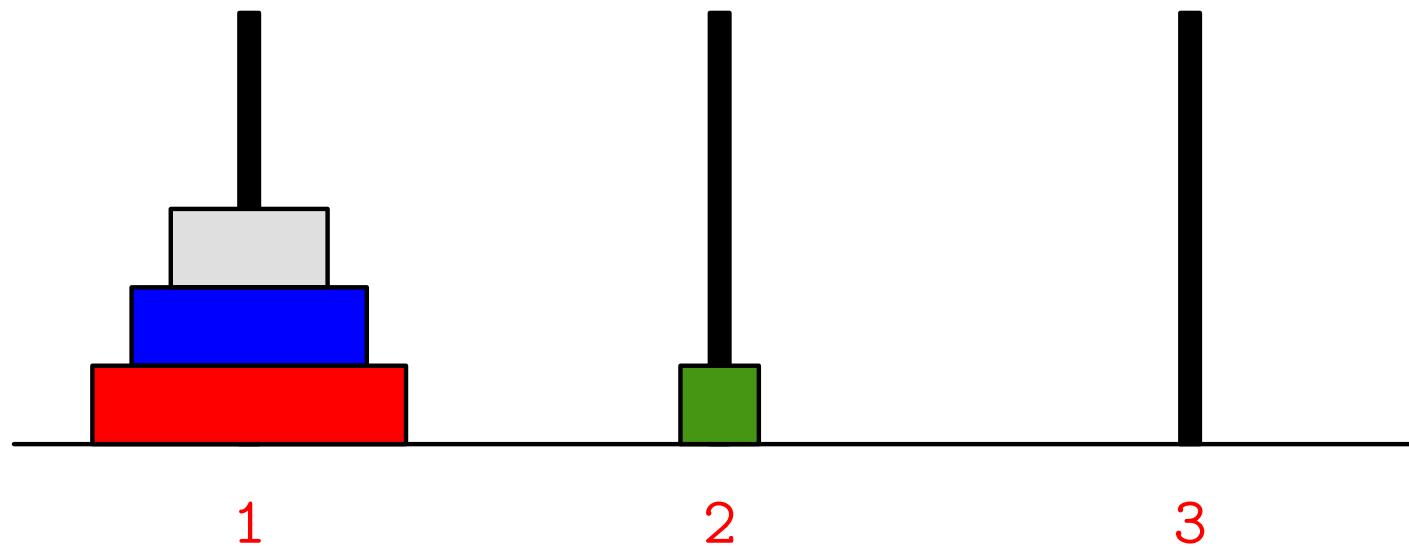
potez = 0



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

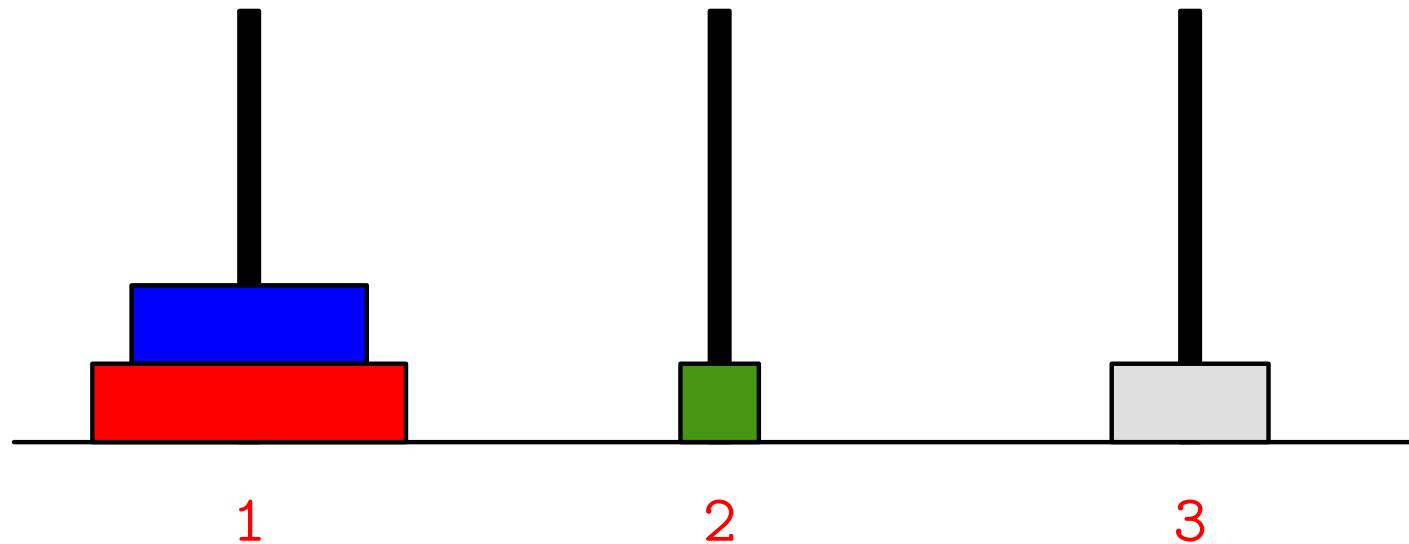
potez = 1



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

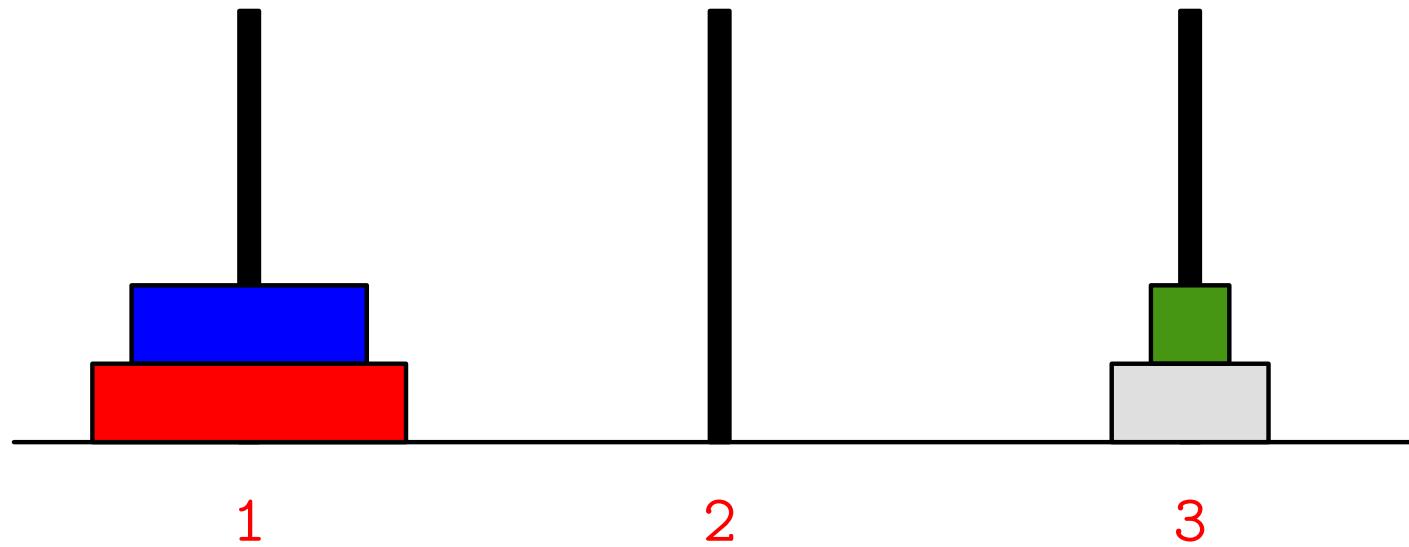
potez = 2



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

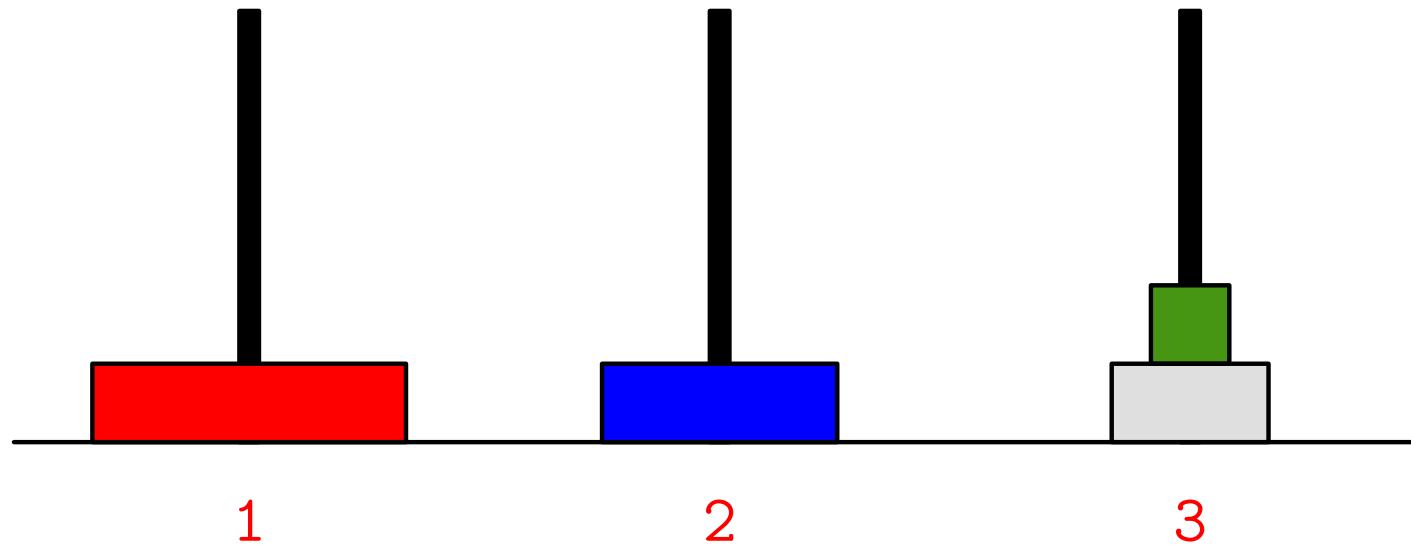
potez = 3



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

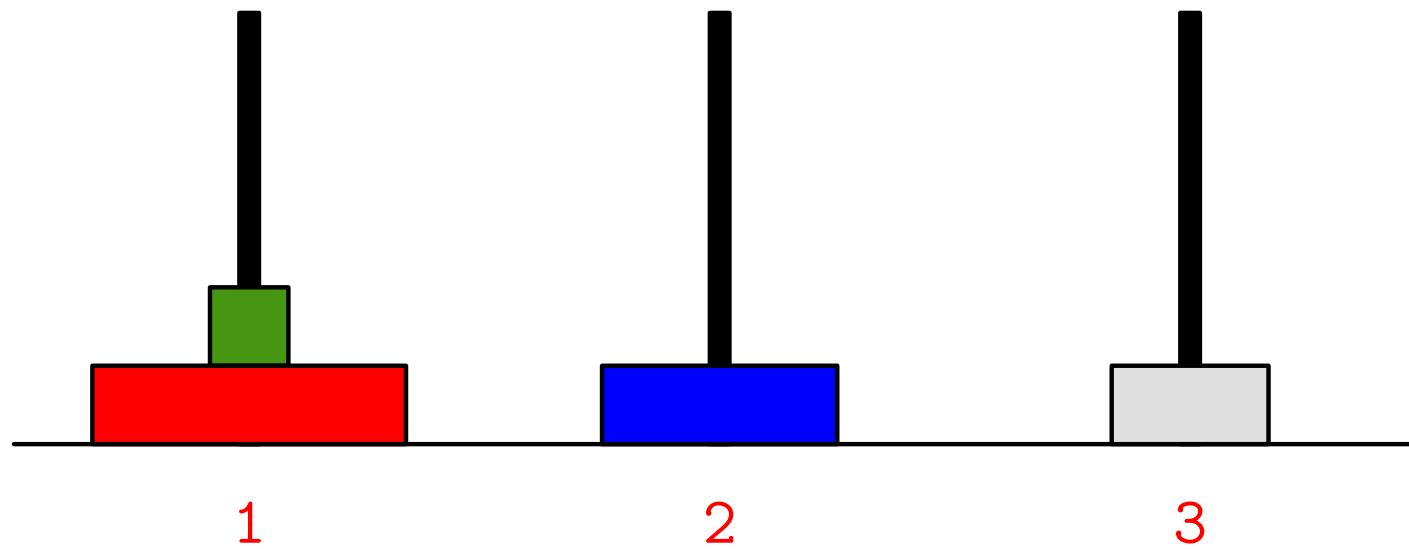
potez = 4



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

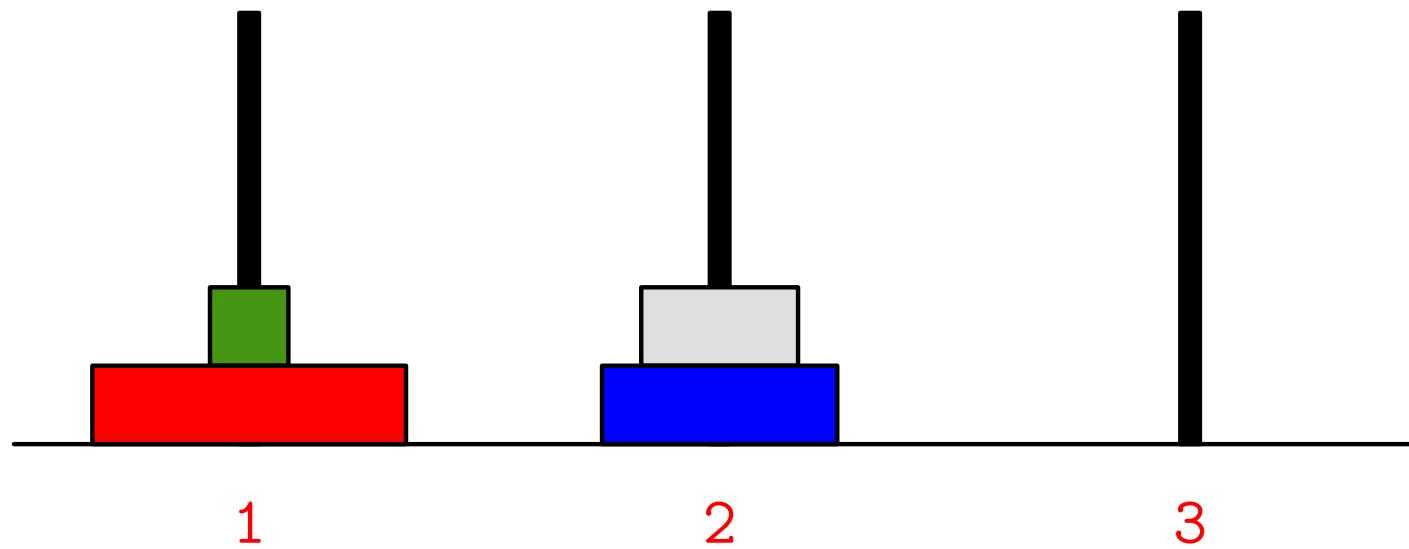
potez = 5



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

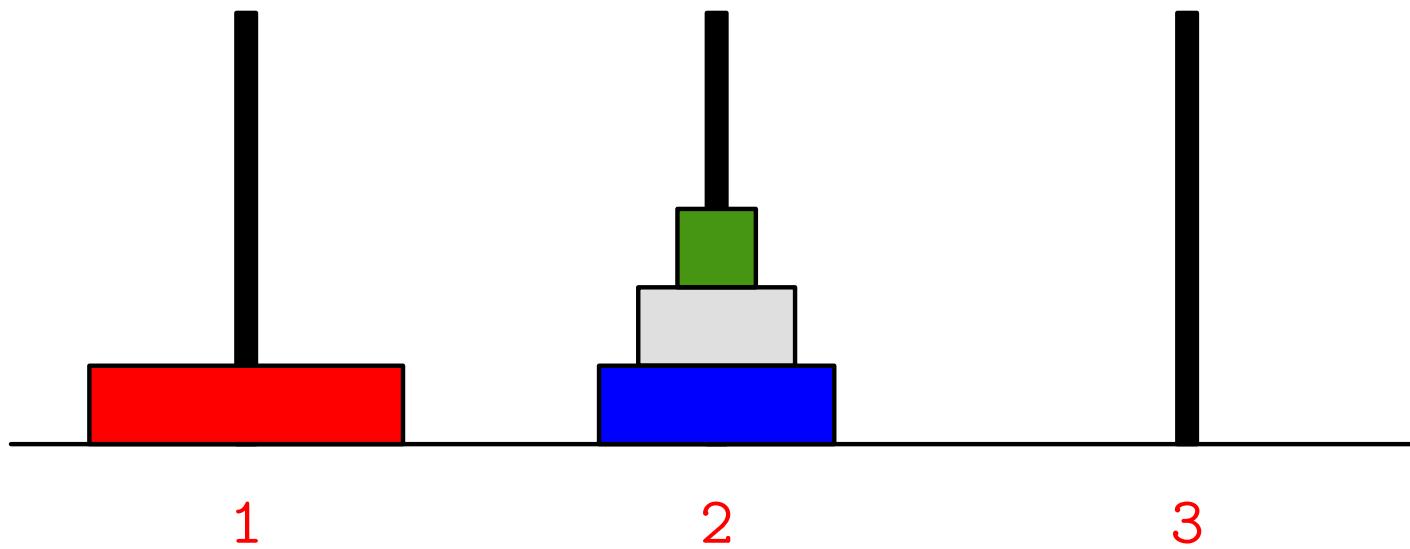
potez = 6



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

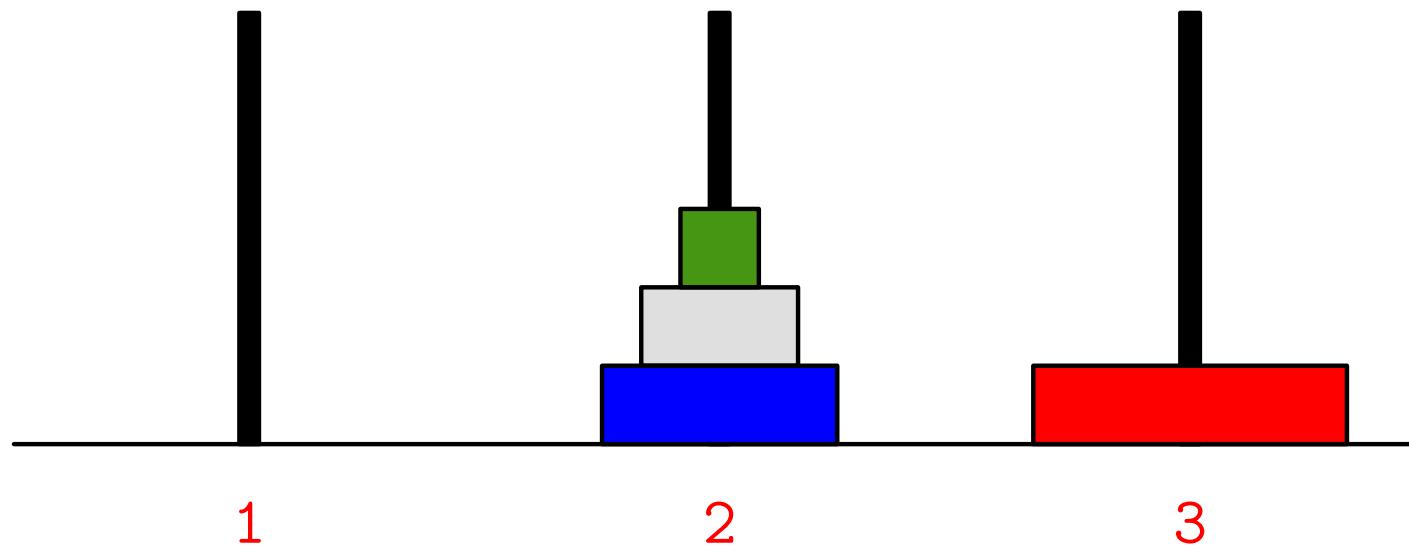
potez = 7



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

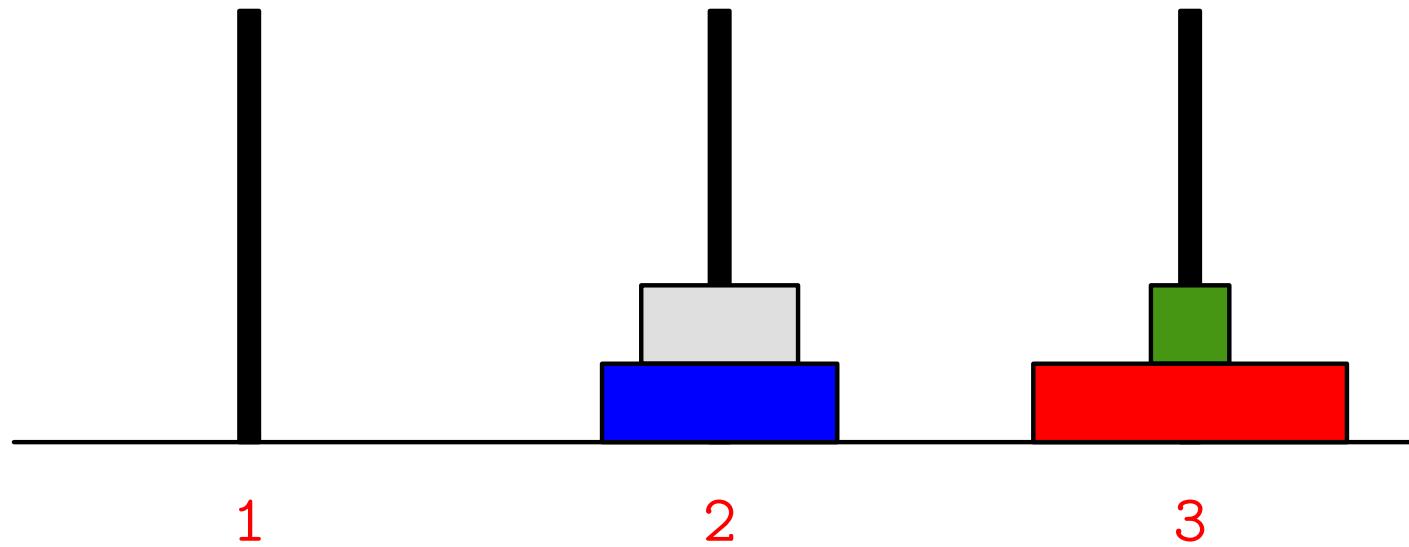
potez = 8



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

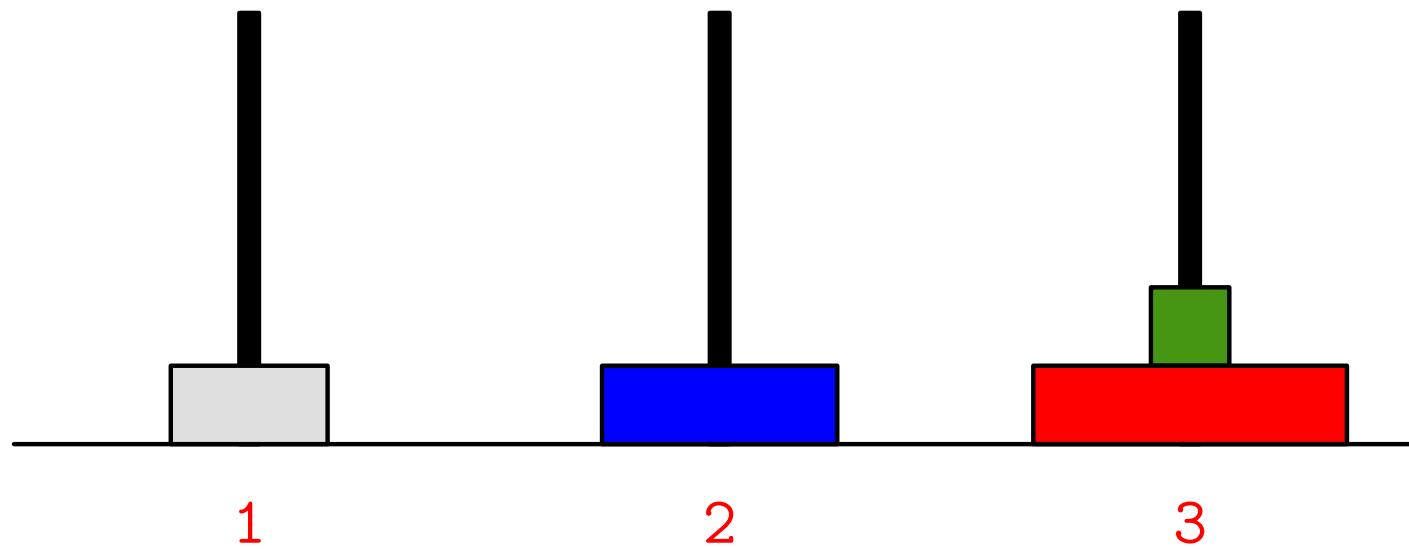
potez = 9



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

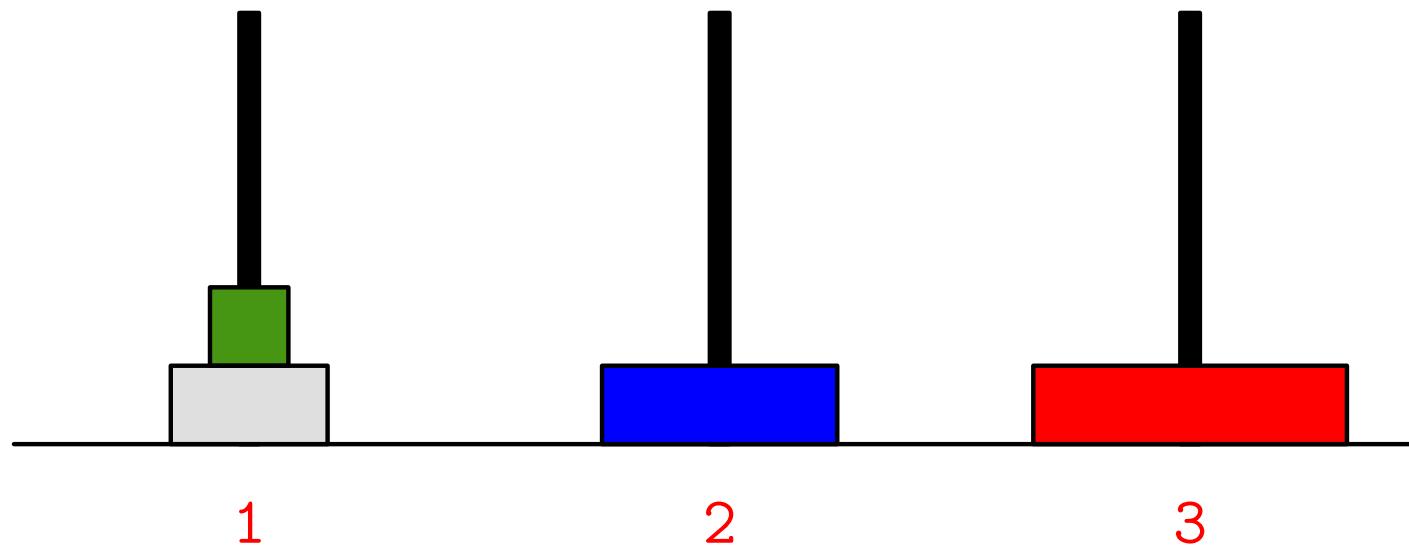
potez = 10



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

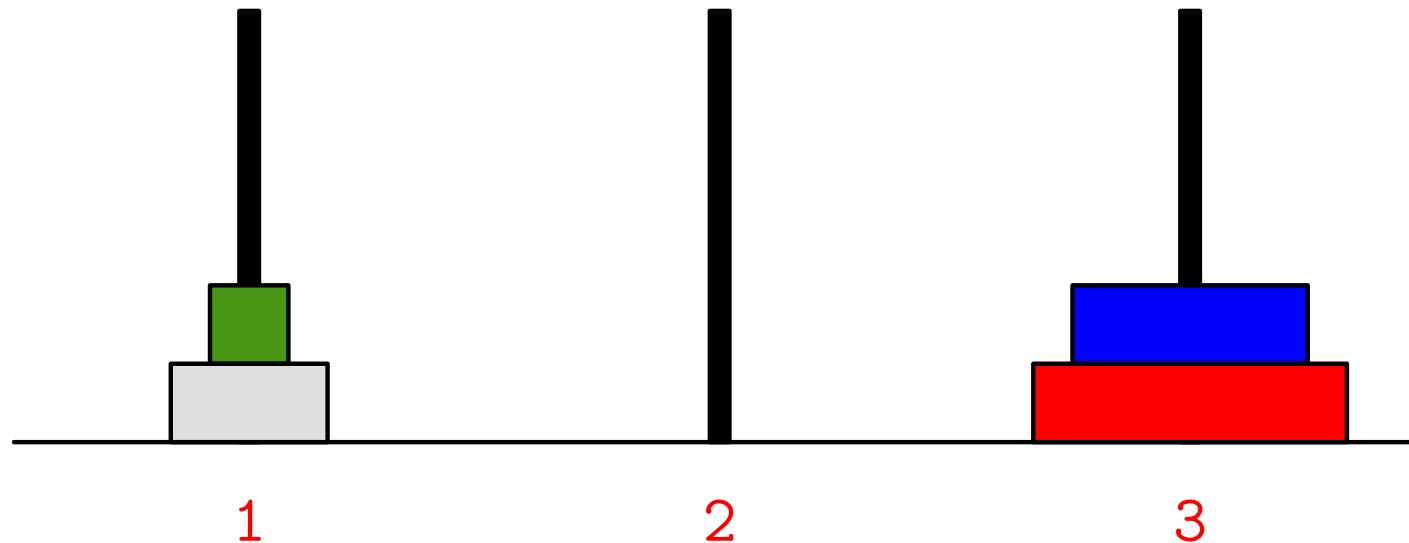
potez = 11



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

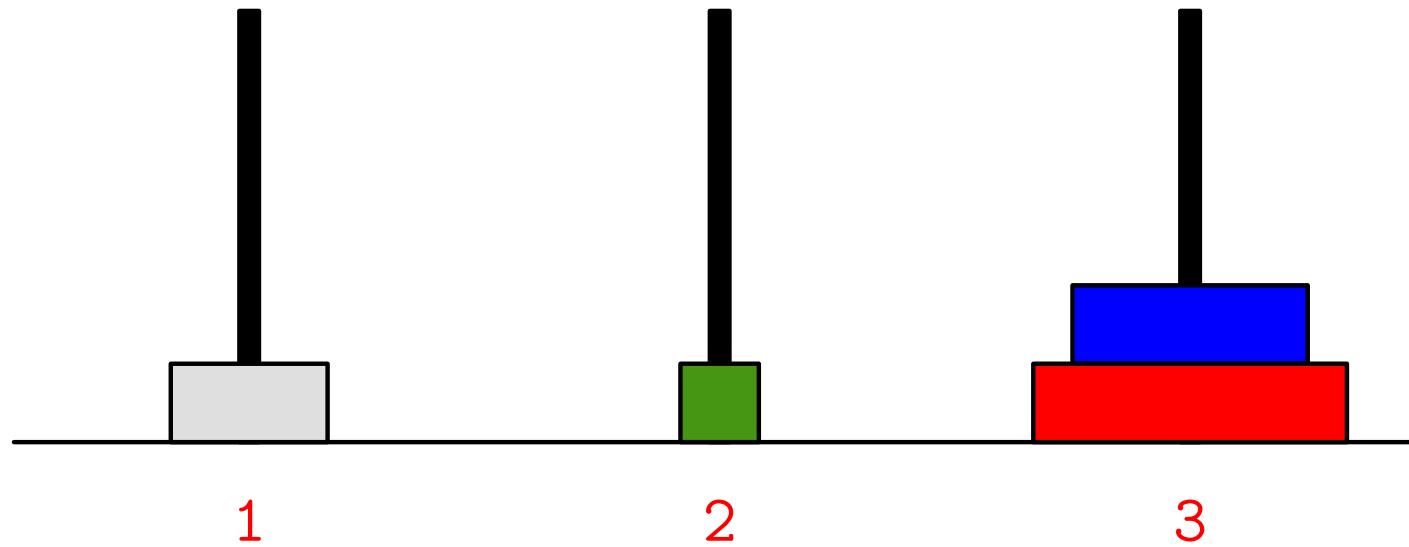
potez = 12



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

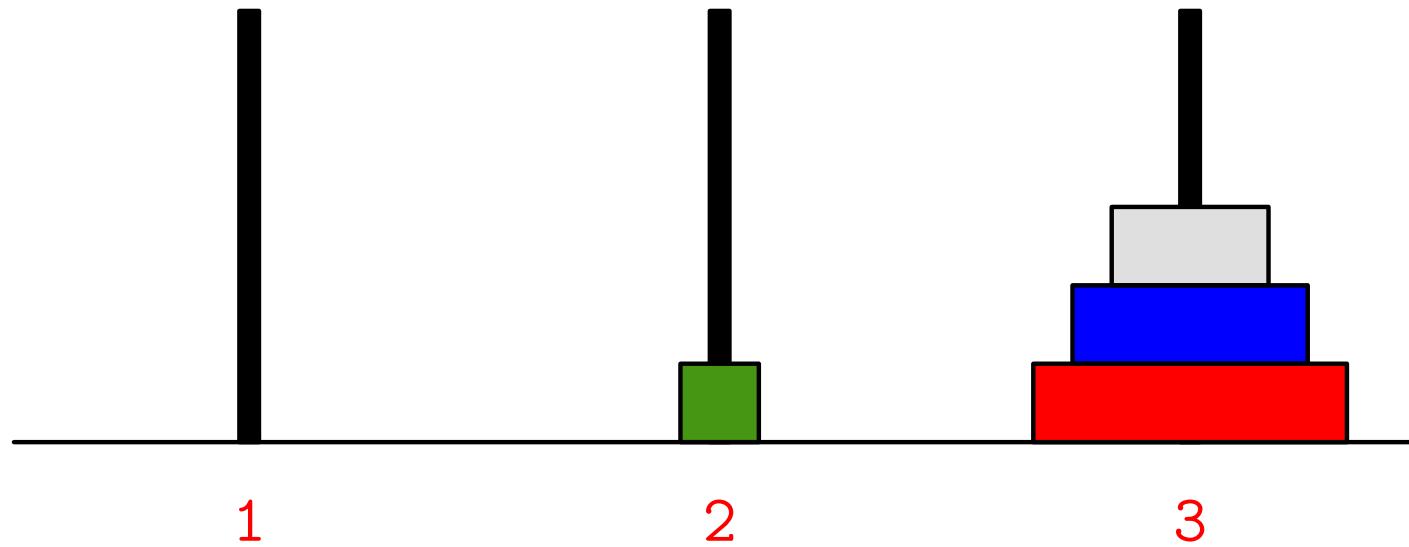
potez = 13



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

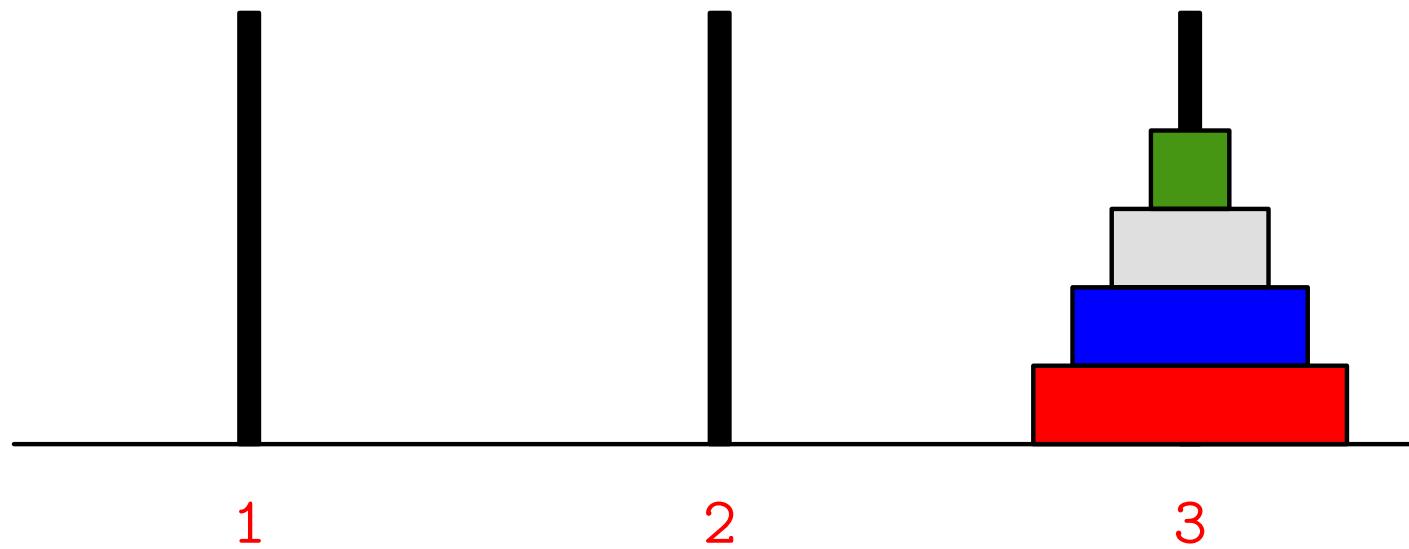
potez = 14



# *Hanojski tornjevi — potezi*

Ovako izgleda prebacivanje potez po potez.

potez = 15



## *Hanojski tornjevi — animacija*

Zgodnu animaciju Hanojskih tornjeva (pisani u jeziku Java) možete naći na web-stranici:

<http://www.mazeworks.com/hanoi>.

## *Hanojski tornjevi — skica programa*

Program za rješenje problema Hanojskih tornjeva, očito, ima dvije funkcije:

- `prebaci_jednog` — koja realizira osnovni potez prebacivanja jednog (najgornjeg) diska s nekog na neki drugi štap,
- `Hanojski_tornjevi` — koja realizira rekurzivno prebacivanje gornjih  $n$  diskova (za zadani  $n$ ) u obliku:
  - prebaci gornjih  $n - 1$  diskova na pomoćni štap,
  - prebaci jedan disk (najdonji od  $n$ ) na odredišni štap,
  - prebaci onih gornjih  $n - 1$  diskova s pomoćnog na odredišni štap.

Precizna realizacija ovih funkcija ovisi o tome što želimo dobiti kao rješenje problema (tj. što je izlaz).

# *Hanojski tornjevi — redoslijed poteza*

Imamo dvije osnovne mogućnosti:

- želimo točan redoslijed svih osnovnih poteza (“potez po potez”),
- želimo samo ukupni broj osnovnih poteza.

Realizirat ćemo prvu varijantu koja piše redoslijed poteza.  
Drugu — probajte sami.

Obje funkcije tada moraju dobiti točna značenja pojedinih štapova:

- prebaci\_jednog mora znati odakle i kamo prebacuje,
- Hanojski\_tornjevi, osim n, isto mora znati odakle i kamo prebacuje. Radi jednostavnosti, dodat ćemo i pomocni, da ga ne moramo računati iz preostala dva.

# *Hanojski tornjevi — početak programa*

Sljedeći program ispisuje **redoslijed poteza**, tj. prebacivanja (najgornjih) diskova. Program poziva **rekurzivnu** funkciju **Hanojski\_tornjevi**.

Funkcija **prebaci\_jednog** samo **ispisuje** osnovni potez.

---

```
#include <stdio.h>

void prebaci_jednog(int odakle, int kamo)
{
    printf("  prebaci s %d na %d\n", odakle, kamo);

    return;
}
```

---

# Hanojski tornjevi — rekurzivna funkcija

```
void Hanojski_tornjevi(int n, int odakle,
                      int kamo, int pomocni)
{
    if (n > 0) {
        Hanojski_tornjevi(n - 1, odakle, pomocni, kamo);
        prebaci_jednog(odakle, kamo);
        Hanojski_tornjevi(n - 1, pomocni, kamo, odakle);
    }

    return;
}
```

---

Kraj rekurzije: za  $n = 0$  ne radimo ništa — nema poteza!

# *Hanojski tornjevi — glavni program*

```
int main(void) {
    int n;

    for (n = 1; n <= 5; ++n) {
        printf("\n Prebaci %d diskova s 1 na 3:\n", n);
        Hanojski_tornjevi(n, 1, 3, 2);
    }

    return 0;
}
```

Broj diskova  $n$  “vrtimo” od 1 do 5.

**Zadatak.** Dodajte ovom programu i **brojač** poteza.

## Hanojski tornjevi — broj poteza

Uzmimo da imamo  $n$  diskova i neka je  $h_n$  broj poteza (prebacivanja po jednog diska).

Iz razrade **algoritma** odmah vidimo da je

$$h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1} = 2h_{n-1} + 1, \quad \text{za } n \geq 1,$$

i  $h_0 = 0$  (pa je  $h_1 = 1$ , kao što i očekujemo).

Ova nehomogena diferencijska (ili rekurzivna) jednadžba može se riješiti (to se uči na višim godinama) i njeni **rješenje** je

$$h_n = 2^n - 1, \quad \text{za } n \geq 0.$$

**Zadatak.** Dokažite da je ovo zaista **rješenje** gornje jednadžbe!

# Hanojski tornjevi — komentari

Primijetite da naš algoritam, usput, **dokazuje** da polazni problem za  $n$  diskova

- uvijek **ima** rješenje, za svaki  $n$ ,
- i da je **minimalni** broj poteza jednak  $2^n - 1$ ,  
tj. rješenje je, zapravo, i **jedinstveno**.

Vidimo da **broj poteza** u premještanju diskova **vrtooglavo** raste. Razlog tome je da imamo

- samo **3** štapa, tj. samo **jedan pomoćni** štap.

Zanimljivo **poopćenje** ovog problema dobivamo ovako:

- imamo  **$k$**  štapova, gdje je  $k \geq 3$  unaprijed zadan, tako da imamo **više pomoćnih** štapova na raspolaganju.

# Struktura programa

# Sadržaj

- Struktura programa (prvi dio):
  - Blokovska struktura jezika.
  - Doseg varijable — lokalne i globalne varijable.
  - Vijek trajanja varijable, memorijske klase.
  - Program smješten u više datoteka. Vanjski simboli.

# *Struktura C programa*

C program je, zapravo

- skup definicija objekata — varijabli i funkcija:
  - varijable “modeliraju” ili zauzimaju memoriju, a
  - funkcije “modeliraju” ili sadrže instrukcije.

Komunikacija između funkcija ide preko:

- argumenata i vrijednosti koje vraćaju funkcije,
- vanjskih ili globalnih varijabli — to su one definirane izvan bilo koje funkcije.

Funkcije mogu biti

- u bilo kojem poretku u izvornom programu,  
a program može biti smješten (rastavljen) u više datoteka (sve dok ne “cijepamo” funkcije).

# *Struktura C programa (nastavak)*

Objekti u C programu mogu biti:

- globalni ili vanjski (engl. external) — definirani izvan bilo koje funkcije, ili
- lokalni ili unutarnji (engl. internal) — što znači da su definirani “lokalno” unutar neke funkcije.

Bitno:

- Funkcije u C-u su uvek globalne ili vanjske, jer C
  - ne dozvoljava da se funkcije definiraju unutar neke druge funkcije  
(za razliku od nekih drugih jezika, poput Pascal-a).

# *Struktura C programa (nastavak)*

Vanjski objekti imaju svojstvo da se

- svaka referenca na takav objekt s istim imenom zaista i odnosi na istu stvar, tj.
- isto ime ne može značiti dvije različite stvari!

Takva imena su, u načelu, tzv. vanjski simboli, a

● pripadni objekti su univerzalno dohvataljivi (dostupni), čak i kad su funkcije koje ih dohvaćaju u raznim datotekama (i prevode se odvojeno).

Ova univerzalna dohvataljivost može se ograničiti (ključnom riječi static za vanjske objekte, v. malo kasnije).

# *Struktura C programa (nastavak)*

Za **unutarnje** objekte to **ne vrijedi** — oni **nisu** univerzalno dohvatljivi.

Funkcije ne mogu biti **unutarnji** objekti, tj.

- **jedini unutarnji** objekti su **variable**, ili preciznije,
- **argumenti i variable** definirani **unutar** funkcija (argumenti su, ionako, **lokalne** variable).

Krenimo od **lokalnih varijabli** — njih je **najlakše** objasniti,

- jer se definiraju **unutar** blokova, kao što smo dosad, uglavnom, i radili.

# Blokovska struktura jezika

Blok naredbi je svaki **niz naredbi** koji se nalazi **unutar** vitičastih zagrada (recimo, tijelo funkcije).

- C dozvoljava da se u svakom bloku naredbi deklariraju **varijable**. Takve varijable zovu se **lokalne** varijable.
- Deklaracija varijabli **unutar** bloka **mora** prethoditi **prvoj** izvršnoj naredbi u bloku (standard **C90**).

Primjer:

---

```
if (n > 0) {  
    int i;      /* deklaracija varijable */  
    for (i = 0; i < n; ++i)  
        ...  
}
```

---

# **Blokovska struktura jezika (nastavak)**

Pravila **dosega** (“vidljivosti” ili dostupnosti):

- **Varijabla** definirana **unutar** nekog bloka **vidljiva** je samo **unutar tog bloka** (samo tamo postoji).
- **Izvan** bloka toj varijabli se **ne može** pristupiti (ona ne postoji), tj. njeni **ime** izvan bloka **nije definirano**.
- **Izvan** bloka može biti deklarirana **varijabla istog imena**, ali ona je **nedostupna unutar** bloka, jer je “**prekrivena**” varijablom **istog imena**.
- **Varijabla** definirana **izvan** bloka **vidljiva** je u **tom** bloku ako **nije** “**pokrivena**” lokalnom varijablom **istog imena**, tj. ako u bloku **nije** definirana varijabla **istog imena**.

Ukratko, **dostupna** je samo “**najlokalnija**” varijabla **istog imena**.

# *Blokovska struktura jezika (nastavak)*

Primjer:

---

```
int main(void) {
    int x, y;
    ...
    if (x > 0)
    {
        double y; /* int y NIJE vidljiv
                     u bloku */
        /* int x JE vidljiv u bloku */
        ...
    }
}
```

---

# **Blokovska struktura jezika (nastavak)**

Formalni argument funkcije vidljiv je unutar funkcije i nije dohvatljiv (definiran) izvan nje.

- Doseg (vidljivost) formalnog argumenta je isti kao i doseg lokalne varijable definirane na početku funkcije.

Primjer:

---

```
int x, y;  
...  
void f(double x) {  
    double y; /* int x i int y NISU */  
    ... /* vidljivi unutar funkcije */  
}  
int main(void) { ... }
```

---

# Atributi varijable

Varijabla je ime (sinonim) za neku lokaciju ili neki blok lokacija u memoriji (preciznije, za sadržaj tog bloka).

Sve variable imaju tri atributa: tip, doseg (engl. scope) i vijek trajanja (engl. lifetime).

- Tip = kako se interpretira sadržaj tog bloka (piše i čita, u bitovima), što uključuje i veličinu bloka.
- Vijek trajanja = u kojem dijelu memorije programa se rezervira taj blok.
  - Stvarno postoji tri bloka: statički, programski stog (“run-time stack”) i programska hrpa (“heap”).
- Doseg = u kojem dijelu programa je taj dio memorije “dohvatljiv” ili “vidljiv”, u smislu da se može koristiti — čitati i mijenjati.

# *Atributi variable (nastavak)*

- Prema **tipu** imamo varijable tipa
  - **int, float, char**, itd.
- Prema **dosegu** varijable se dijele na:
  - **lokalne** (unutarnje) i **globalne** (vanske).
- Prema **vijeku trajanja** mogu biti:
  - **automatske** i **statičke**.

Doseg i vijek trajanja određeni su, u principu, **mjestom** deklaracije, odnosno, definicije objekta (variable) — unutar ili izvan funkcije.

“Upravljanje” vijekom trajanja (a ponekad i dosegom) vrši se tzv. **identifikatorima memorejske klase** i to kod deklaracije objekta.