

Programiranje 2

9. predavanje

Saša Singer

`singer@math.hr`

`web.math.hr/~singer`

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- **Vezane liste** (nastavak):
 - Ubacivanje na pravo mjesto. “Insertion Sort”.
 - Izbacivanje traženog elementa.
 - Složenije operacije na listama.
 - Spajanje (konkatenacija) dvije liste.
 - Sortirano spajanje dvije liste — “merge”.
 - Sortiranje liste. “MergeSort”.
 - Složenost MergeSorta.

Informacije

Rezultati prvog kolokvija — komentar:

- Općenito gledajući, rezultati su loši.
- Pohvala svima koji imaju ≥ 45 bodova — takvih je 7.

Upozorenje = zadnji “alarm”:

- Oni koji imaju ≤ 20 bodova ozbiljno su “ugroženi”.
- Takvih je čak 84, od 168 pridošlih, tj. 50%!

Kolokviji ispituju gradivo cijelog kolegija, a ne samo vježbe.
Dodatno, nastavak Prog2 je još složeniji!

Iznimno, u petak, 11. svibnja, nastava je

- u predavaonici (201), a ne u (003).

Informacije

Konzultacije (službeno):

🕒 petak, 12–14 sati, ili — po dogovoru.

Programiranje 2 je u kolokvijskom razredu C3.

🕒 Drugi kolokvij: petak, 1. 6., u 15 sati,

🕒 Popravni kolokvij: petak, 15. 6., u 15 sati.

Uputa: “izbjegnite” popravni — obavite to ranije!

Ne zaboravite, “žive” su i domaće zadaće na adresi

<http://degorgi.math.hr/prog2/ku/>

Dodatni bodovi “čekaju na vas”.

Vezane liste (nastavak)

Sadržaj

- Vezane liste (nastavak):
 - Ubacivanje na pravo mjesto. “Insertion Sort”.
 - Izbacivanje traženog elementa.
 - Složenije operacije na listama.
 - Spajanje (konkatenacija) dvije liste.
 - Sortirano spajanje dvije liste — “merge”.
 - Sortiranje liste. “MergeSort”.
 - Složenost MergeSorta.

Sortirano ubacivanje elementa u listu

Primjer. Imamo **vezanu listu cijelih** brojeva, zadanu pokazivačem **prvi** na prvi element. Dodatno,

- 📌 pretpostavljamo da je lista **uzlazno** sortirana, od početka prema kraju liste.

U tu listu treba **ubaciti jedan** element, zadan pokazivačem **novi**, ali tako da

- 📌 **nova** (“povećana”) lista, također, bude **uzlazno** sortirana.

Dogovor: kao i uvijek, polazna lista smije biti **prazna**!

Drugim riječima, zadani element treba

- 📌 **ubaciti** na njegovo “**pravo**” mjesto u listi.

Sortirano ubacivanje elementa u listu (nastavak)

Posao koji treba napraviti ima dva dijela:

- prvo treba pronaći to “pravo” mjesto na koje treba ubaciti element (“traženje po listi”);
- zatim treba ubaciti zadani element na to mjesto.

Ova dva dijela još treba korektno “povezati”. Dakle:

- Što treba “pronaći” u prvom dijelu,
- da bismo korektno “ubacili” element u drugom dijelu?

Bez obzira na to gdje je “pravo” mjesto elementa u listi,

- za sva ubacivanja u listu uvijek koristimo isti princip:
 - “ubaci iza nekog” — kao u funkciji ubaci_iza!

Sortirano ubacivanje elementa u listu (nastavak)

Ubacivanje elementa u listu ima **dvije** operacije — i treba ih napraviti **točno** tim redom. **Prvo**:

- ➊ **novom** elementu treba postaviti **sljedećeg**,

a **zatim**:

- ➋ **prethodnom** elementu treba promijeniti **sljedećeg** na **novog**, a

- ➌ ako prethodnog **nema**, onda pokazivač **prvi** treba postaviti na **novog** (novi element postaje prvi).

A to znači da **traženje pravog** mjesta u listi mora naći

- ➍ pokazivač **preth** na “**prethodni**” element — onaj **iza** kojeg ubacujemo **novog**.

Sortirano ubacivanje elementa u listu (nastavak)

S druge strane, zato što je lista **uzlazno** sortirana, **traženje** “**pravog**” mjesta ide tako da:

- **preskačemo** sve **elemente** čiji sadržaj je (strogo) **manji** od sadržaja **novog**, a
- **stajemo** na prvom **elementu** čiji sadržaj je **veći** ili **jednak** od sadržaja **novog** (ako takav **postoji**).

Sad **oprez!** Tako nalazimo element **ispred** kojeg treba ubaciti novog. Zato koristimo **dva** pokazivača:

- **pom** — na element čiji **sadržaj testiramo** i
- **preth** — na element **ispred** tog.

Napomena: Možemo i **bez** pokazivača **pom**! Po logici, uvijek vrijedi **pom = preth->sljed**, ali se lakše čita kad imamo oba.

Funkcija sortirano_ubaci

```
lista sortirano_ubaci(lista prvi, lista novi)
{
    /* Insertion sort. */
    /* Ne provjerava novi != NULL. */

    lista preth, pom;

    if (prvi == NULL) return novi;
```

Funkcija sortirano_ubaci — *nastavak*

```
pom = prvi;  
preth = NULL;    /* Nije nuzno. */  
  
while (pom != NULL && pom->broj < novi->broj) {  
    preth = pom;  
    pom = pom->sljed;  
}
```

Funkcija sortirano_ubaci — *nastavak*

```
        /* Ovo ispod je:
           ubaci_iza(prvi, preth, novi); */
        /* To radi i za prvi == NULL. */
if (pom == prvi) {
    novi->sljed = prvi;
    prvi = novi;
}
else {
    novi->sljed = preth->sljed;
    preth->sljed = novi;
}

return prvi;
}
```

Sortiranje ubacivanjem — Insertion Sort

Sortirano ubacivanje **jednog** elementa može se iskoristiti i kao algoritam za **sortiranje** niza podataka.

Sortiranje ubacivanjem ili Insertion Sort:

- Na početku je **sortirana** lista **prazna**.
- Nakon toga, **sortirano** ubacujemo **jedan** po **jedan** element, s tim da svaki **element** sadrži po **jedan** podatak iz **niza** kojeg treba sortirati.
- Postupak **ubacivanja** ponavljamo sve dok ne ubacimo **sve** takve elemente.

Uočite da je upravo **vezana lista** “**zgodna**” struktura za **realizaciju** ovog algoritma (za razliku od **polja**).

Insertion Sort (nastavak)

U tom algoritmu, **nije** bitno kako **nastaju** pojedini **elementi** sortirane liste.

- Možemo redom čitati **brojeve** (sadržaje) i **kreirati** pripadne elemente — jedan po jedan, ili
- startati s postojećem **nesortiranom** listom elemenata, iz koje **izbacujemo** jedan po jedan element, na pr. s **početka**.

U programu **1_5.c** dan je primjer takvog sortiranja učitano niza — kreiranjem element po element.

Napomena. Složenost ovog algoritma je $O(n^2)$. U praksi se koristi samo za **vrlo kratke** liste. Postoji i puno **bolji** algoritam za sortiranje liste (v. **MergeSort**, malo kasnije).

Zadatak. Napravite **Insertion Sort** zadanog niza na **polju**.

Izbacivanje traženog elementa iz liste

Primjer. Imamo **vezanu listu cijelih** brojeva, zadanu pokazivačem **prvi** na prvi element.

- 📌 Iz te liste treba **obrisati prvi** element s **parnim** brojem (kao sadržajem).
- 📌 Ako takvog elementa **nema**, lista se **ne mijenja**.

Dogovor: Polazna lista smije biti **prazna**!

Opet, bez obzira na to **gdje** se **nalazi** “traženi” element u listi,

- 📌 za sva **izbacivanja** ili **brisanja** iz liste **uvijek** koristimo isti princip:
 - 📌 “izbaci ili obriši **iza** nekog” — kao u funkciji **obrisi_iza**!

Izbacivanje traženog elementa iz liste (nast.)

Izbacivanje elementa iz liste ima **dvije** operacije.

- 🕒 **Prvo** treba **naći** **traženi** element u listi (onaj kojeg treba izbaciti).

Zatim, **ako** ga nađemo:

- 🕒 **prethodnom** elementu treba promijeniti **sljedećeg** na onog **iza** traženog, a
- 🕒 ako prethodnog **nema**, onda pokazivač **prvi** treba postaviti na onog **iza** traženog (traženi je bio prvi).

Dakle, **traženje** tog **elementa** u listi mora naći

- 🕒 pokazivač **preth** na “**prethodni**” element — onaj **iza** kojeg izbacujemo **traženog**.

Izbacivanje traženog elementa iz liste (nast.)

Kao i kod ubacivanja, koristimo dva pokazivača:

- 🔴 `pom` — na element čiji `sadržaj` `testiramo` i
- 🔴 `preth` — na element `ispred` tog.

Napomena: Opet, zbog `pom = preth->sljed`, cijeli posao možemo napraviti i `bez` pokazivača `pom`.

Naravno, kao i uvijek, još treba paziti na

- 🔴 `praznu` listu i
- 🔴 `izbacivanje` s `početka` — kao u u funkciji `obrisi_iza`.

Provjerite da ranije uočeni `nedostaci` funkcije `obrisi_iza`

- 🔴 `prvi == NULL` i `preth->sljed == NULL`

ovdje `nisu` bitni — tj. da ne mogu dovesti do greške!

Funkcija obrisi_prvi_parni

```
lista obrisi_prvi_parni(lista prvi)
{
    /* Brise prvi parni element u listi.
       Ako ga nema - ne radi nista. */

    lista preth, pom;

    if (prvi == NULL) return NULL;    /* Ne treba. */
}
```

Funkcija obrisi_prvi_parni — *nastavak*

```
pom = prvi;  
preth = NULL;    /* Ovdje je nuzno. */  
  
while (pom != NULL && pom->broj % 2 != 0) {  
    preth = pom;  
    pom = pom->sljed;  
}
```

Funkcija obrisi_prvi_parni — *nastavak*

```
/* Test jesmo li nasli parnog! */

if (pom != NULL) {
    /* Ovo ispod je:
       obrisi_iza(prvi, preth); */
    /* To radi i za preth == NULL. */
    if (preth == NULL) {
        pom = prvi;
        prvi = prvi->sljed;
    }
    else {
        pom = preth->sljed;    /* Ne treba. */
        preth->sljed = pom->sljed;
    }
}
```

Funkcija obrisi_prvi_parni — *nastavak*

```
        free(pom);  
        /* Ne treba pom = NULL; */  
    }  
  
    return prvi;  
}
```

U programu `l_6.c` kreiramo listu

🔴 2 -> 4 -> 5 -> 6 -> 8 -> 9 -> 10 -> NULL.

a zatim iz nje 6 puta **brišemo** prvi **parni** element. Zadnje brisanje **ne** mijenja listu. Završna lista je

🔴 5 -> 9 -> NULL.

Zadaci na temu — ubaci/izbaci

Zadatak. Napišite funkciju `izbaci_iza` sa zaglavljem

```
lista izbaci_iza(lista prvi, lista preth,  
                 lista *p_izbacen);
```

Funkcija treba:

- 🔴 iz liste zadane **pokazivačem** `prvi` na prvi element,
- 🔴 **izbaciti element** koji se nalazi odmah **iza** elementa na kojeg pokazuje `preth`.

Za razliku od funkcije `obrisi_iza`, **izbačeni** element se **ne briše**, već treba

- 🔴 **vratiti** pokazivač na njega — kroz **varijabilni** argument `*p_izbacen` (slično kao u funkciji `ubaci_na_kraj`).

Zadaci na temu — ubaci/izbaci (nastavak)

Vrijednost funkcije je (kao i inače):

- 📍 **pokazivač** na **prvi** element dobivene liste.

Napišite funkciju tako da radi “**korektno**” u **svim** mogućim slučajevima:

- 📍 **prvi == NULL** — ne radi ništa, samo vraća **NULL** i ***p_izbacen = NULL**,
- 📍 **preth == NULL** — izbacuje **prvi** element liste,
- 📍 **preth == zadnji**, tj. **preth->sljed == NULL** — ne izbacuje ništa i uredno vraća ***p_izbacen = NULL**.

Zadaci na temu — ubaci/izbaci (nastavak)

Zadatak. Vezana lista **brojeva** zadana je **pokazivačem prvi** na prvi element. Napišite funkciju koja **rastavlja** tu listu u **dvije** liste, tako da

- **prva** lista sadrži samo elemente s **parnim** sadržajem, a
- **druga** lista sadrži samo elemente s **neparnim** sadržajem iz polazne liste.

Funkcija treba **vratiti pokazivače** na te **dvije** liste — kroz “**varijabilne**” argumente.

Rastav liste treba napraviti

- samo **promjenama veza** (pokazivača).

Zabranjeno je **mijenjati sadržaje** elemenata, te **alocirati** i/ili **deallocirati memoriju** (tj. koristiti “**pomoćne**” elemente)!

Zadaci na temu — ubaci/izbaci (nastavak)

Varijacije. Relativni **poredak** elemenata u dobivenim listama:

- smije biti **bilo koji**,
- **mora** biti **isti** kao u polaznoj listi.

Zadaci na temu — preuredi listu

Zadatak. Vezana lista **brojeva** zadana je **pokazivačem prvi** na prvi element. Napišite funkciju koja **preuređuje** tu listu, tako da

- na **početku** liste budu svi elementi s **parnim** sadržajem, a
- na **kraju** liste (iza svih parnih) budu svi elementi s **neparnim** sadržajem iz polazne liste.

Funkcija treba **vratiti pokazivač** na **prvi** element **preuređene** liste.

Preuređenje liste treba napraviti

- samo **promjenama veza** (pokazivača).

Zabranjeno je **mijenjati sadržaje** elemenata, te **alocirati** i/ili **deallocirati memoriju** (tj. koristiti “**pomoćne**” elemente)!

Zadaci na temu — preuredi listu (nastavak)

Varijacije. Relativni **poredak** elemenata u dobivenim listama:

- 🔴 smije biti **bilo koji**,
- 🔴 **mora** biti **isti** kao u polaznoj listi.

Unutar funkcije, smijete koristiti

- 🔴 **rastav** liste u **dvije** liste,
- 🔴 **spajanje** dvije liste — konkatencija (v. sljedeći primjer).

Probajte zadatak riješiti **bez** toga, tj.

- 🔴 “**unutar**” samo **jedne** liste!

Zadaci na temu — preuredi listu (nastavak)

Zadatak. Vezana lista **brojeva** zadana je **pokazivačem prvi** na prvi element. Napišite funkciju **okreni_listu**

```
lista okreni_listu(lista prvi);
```

koja preuređuje tu listu, tako da cijelu listu

🔵 **okreće** naopako, tj. **invertira** poredak elemenata u listi.

Funkcija treba **vratiti pokazivač** na **prvi** element “**preokrenute**” liste (to je zadnji element u polaznoj listi).

Invertiranje liste treba napraviti

🔵 samo **promjenama veza** (pokazivača).

Zabranjeno je **mijenjati sadržaje** elemenata, te **alocirati** i/ili **deallocirati memoriju** (tj. koristiti “**pomoćne**” elemente)!

Spajanje (konkatenacija) dvije liste

Primjer. Imamo dvije vezane liste cijelih brojeva, zadane pokazivačima `prvi_1` i `prvi_2` na prvi element odgovarajuće liste. Te dvije liste treba spojiti u jednu listu, tako da

- druga lista bude iza prve (poredak elemenata u pojedinoj listi se ne mijenja).

Ova operacija se još zove i **konkatenacija** — po analogiji s konkatenacijom dva stringa (funkcija `strcat`).

Dogovor: kao i uvijek, obje polazne liste smiju biti prazne!

Drugim riječima, u spojenoj listi

- sljedbenik zadnjeg elementa prve liste mora biti prvi element druge liste.

Spajanje dvije liste (nastavak)

Posao koji treba napraviti ima dva dijela:

- ➊ prvo treba pronaći zadnji element u prvoj listi (kao u funkciji `trazi_zadnji`);
- ➋ zatim treba postaviti njegovog sljedbenika na prvi element druge liste.

Funkcija spoji_dviije

```
lista spoji_dviije(lista prvi_1, lista prvi_2)
{
    lista pom = prvi_1;

    if (prvi_1 == NULL) return prvi_2;

    for ( ; pom->sljed != NULL; pom = pom->sljed);

    pom->sljed = prvi_2;

    return prvi_1;
}
```


Funkcija spoji_dviije_rek

Konkatenaciju možemo napraviti i **rekurzivnom** funkcijom:

```
lista spoji_dviije_rek(lista prvi_1, lista prvi_2)
{
    if (prvi_1 == NULL) return prvi_2;

    if (prvi_1->sljed == NULL)
        prvi_1->sljed = prvi_2;
    else
        spoji_dviije_rek(prvi_1->sljed, prvi_2);
        /* Ne trebamo vrijednost funkcije! */

    return prvi_1;
}
```

Spajanje dvije liste — demo-program

Program `l_7.c` kreira dvije liste

➤ 1 -> 3 -> 5 -> 7 -> NULL,

➤ 2 -> 4 -> 6 -> 8 -> NULL,

a zatim ih spaja — konkatenera. Dobivena lista je

➤ 1 -> 3 -> 5 -> 7 -> 2 -> 4 -> 6 -> 8 -> NULL.

Program `l_7r.c` radi to isto, ali

➤ sve funkcije za rad s listama su rekurzivne!

Pitanje: Zašto to je ili nije dobro?

Kad imamo dvije već sortirane liste, kao u ovom primjeru, onda ih nema smisla nesortirano spajati (konkatenerati).

➤ Kako ih treba spojiti da dobijemo sortiranu listu?

Sortirano spajanje (merge) dvije sortirane liste

Primjer. Imamo dvije vezane liste cijelih brojeva, zadane pokazivačima `prvi_1` i `prvi_2` na prvi element odgovarajuće liste. Dodatno, pretpostavljamo da su

- obje liste već **uzlazno sortirane**, od početka prema kraju liste.

Te dvije liste treba **spojiti** u jednu listu, ali tako da

- **spojena** lista, također, bude **uzlazno sortirana**.

Ova operacija se još zove i **sortirano spajanje** (engl. **merge**).

Dogovor: kao i uvijek, obje polazne liste smiju biti **prazne**!

Merge dvije sortirane liste (nastavak)

Skica algoritma.

- 🔴 Ako je barem jedna od dvije liste prazna, rezultat je ona druga lista (može i ona biti prazna).

U protivnom, obje liste su neprazne.

Ideja za nastavak algoritma — “pametni” Insertion Sort:

- 🔴 Na početku je spojena lista prazna.
- 🔴 Zatim “gradimo” spojenu listu — element po element, tako da stalno bude uzlazno sortirana.

Za to nam ne treba opći algoritam za sortirano ubacivanje (funkcija `sortirano_ubaci`).

- 🔴 Tu iskoristimo pretpostavku da su polazne liste već uzlazno sortirane — i to je “pametno”!

Merge dvije sortirane liste (nastavak)

Zato što su liste **uzlazno** sortirane,

- **najmanji** element u svakoj u njih je baš **prvi** element.
- Usporedimo te **prve** elemente i **manji** od njih je sigurno **najmanji** element u **obje** liste.
- **Izbacimo** ga iz odgovarajuće liste — s **početka**,
- i **ubacimo** ga **na kraj** spojene liste!

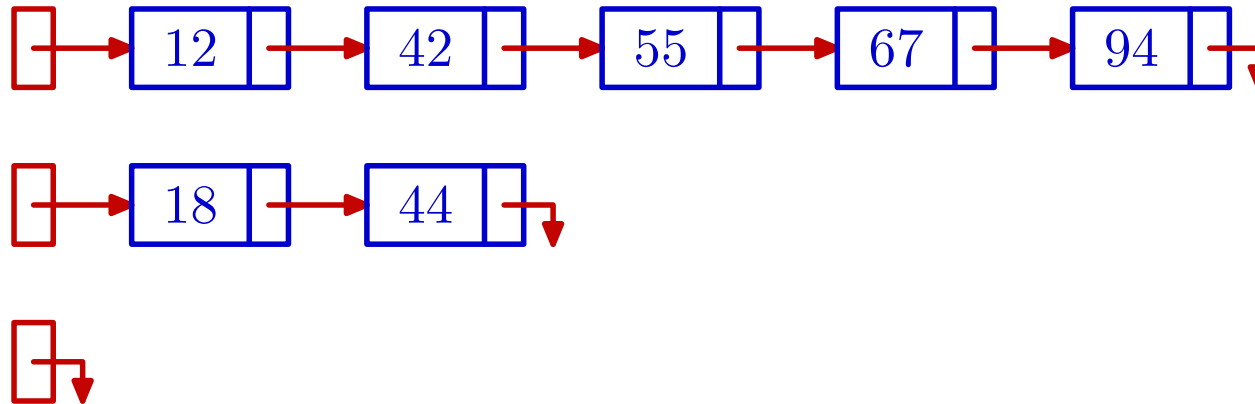
Ovo ponavljamo sve dok su **obje** liste **neprazne**.

Na kraju, kad ostanemo s jednom “**nepotrošenom**” listom,

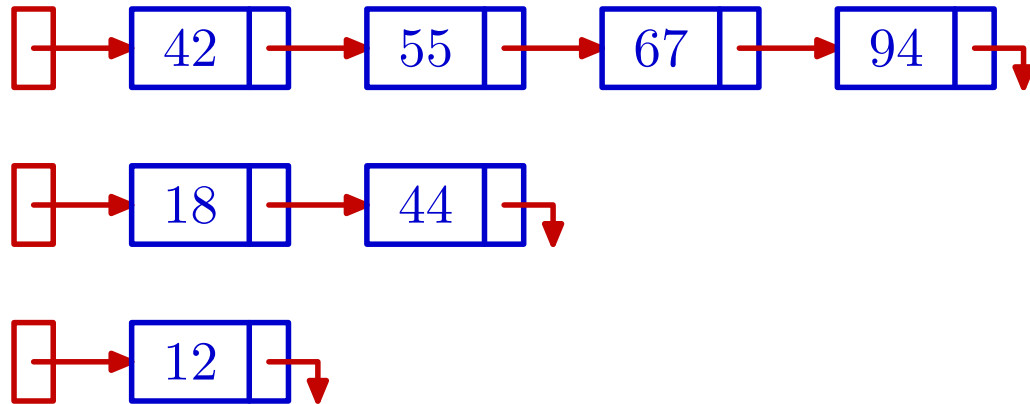
- **spojimo** tu listu **na kraj** dotad spojene liste (konkatenacija).

I nije tako komplicirano!

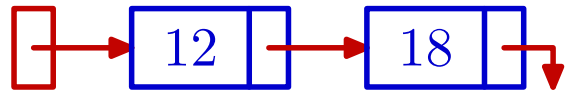
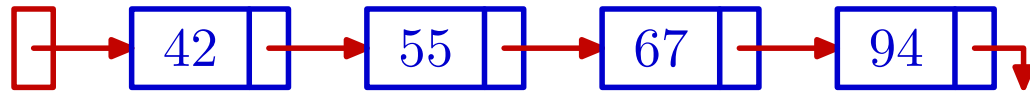
Merge dvije sortirane liste — primjer



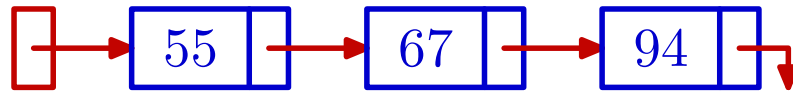
Merge dvije sortirane liste — primjer



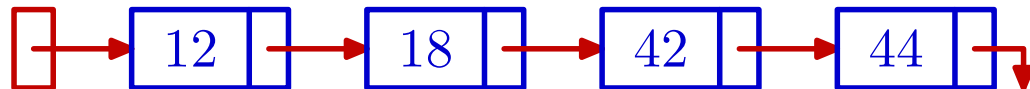
Merge dvije sortirane liste — primjer



Merge dvije sortirane liste — primjer



Merge dvije sortirane liste — primjer



Merge dvije sortirane liste — primjer



Funkcija merge

```
lista merge(lista prvi_1, lista prvi_2)
{
    /* Sortirano spaja dvije liste (merge). */

    lista prvi = NULL, zadnji, pom;

    if (prvi_1 == NULL) return prvi_2;
    if (prvi_2 == NULL) return prvi_1;
```

Funkcija merge — nastavak

```
while (prvi_1 != NULL && prvi_2 != NULL) {  
    if (prvi_1->broj <= prvi_2->broj) {  
        pom = prvi_1;  
        prvi_1 = prvi_1->sljed;  
    }  
    else {  
        pom = prvi_2;  
        prvi_2 = prvi_2->sljed;  
    }  
}
```

Funkcija merge — *nastavak*

```
        if (prvi == NULL)
            prvi = pom;
        else
            zadnji->sljed = pom;
        zadnji = pom;
    }

    if (prvi_1 == NULL)
        zadnji->sljed = prvi_2;
    if (prvi_2 == NULL)
        zadnji->sljed = prvi_1;

    return prvi;
}
```

Merge dvije sortirane liste — demo-program

Program `l_8.c` kreira iste dvije liste kao u prošlom primjeru

➤ `1 -> 3 -> 5 -> 7 -> NULL,`

➤ `2 -> 4 -> 6 -> 8 -> NULL,`

a zatim ih sortirano spaja. Dobivena lista je

➤ `1 -> 2 -> 3 -> 4 -> 5 -> 6 -> 7 -> 8 -> NULL.`

Na kraju, program još okreće ovu listu (`okreni_listu`).

Program `l_8r.c` radi to isto, s tim da je

➤ funkcija `merge` implementirana rekurzivno i zove se `merge_rek`,

➤ a rekurzivne su i sve ostale funkcije za rad s listama.

Pitanje: Zašto to je ili nije dobro?

Sortiranje spajanjem — MergeSort

Primjer. Imamo jednu vezanu listu cijelih brojeva, zadanu pokazivačem **prvi** na prvi element liste.

- 🕒 Tu listu treba **uzlazno sortirati** — po sadržaju elemenata, od početka prema kraju liste, i
- 🕒 **vratiti** pokazivač na početak **sortirane** liste.

Dogovor: polazna lista smije biti **prazna**!

Sortiranje liste treba napraviti

- 🕒 samo **promjenama veza** — pokazivača.

Zabranjeno je **mijenjati sadržaje** elemenata, te **alocirati** i/ili **deallocirati memoriju** (tj. koristiti “**pomoćne**” elemente)!

Sortiranje spajanjem — MergeSort (nastavak)

Za sortiranje liste koristimo MergeSort algoritam. To je rekurzivni algoritam za sortiranje niza podataka

- baziran na operaciji merge — sortiranom spajanju već sortiranih nizova podataka.

U našem primjeru, niz podataka je spremljen u obliku liste.

Osnovna ideja MergeSort algoritma:

- Podijeli nesortirani niz podataka na dva dijela (podniza) — podjednake “duljine” (to je bitno za složenost!).
- Rekurzivno sortiraj svaki od nastalih podnizova.
- Sortirano spoji (merge) ta dva već sortirana podniza u jedan sortirani niz.

Sortiranje spajanjem — MergeSort (nastavak)

Rekurzivno “raspolavljanje” i sortiranje radimo sve dok ne dobijemo “trivijalan” niz:

- prazan ili jednočlan.

Ovakvi nizovi su “već sortirani”.

Dakle, ako je ulazna lista prazna ili jednočlana

- nema rekurzije, već samo vraćamo (ulazni) pokazivač na tu listu.

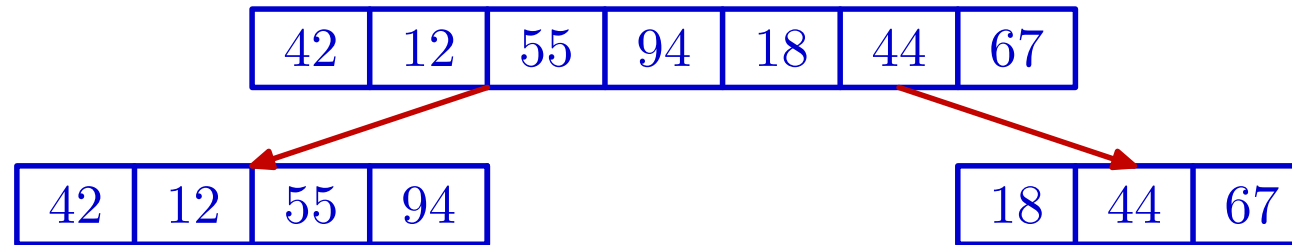
Uočite da je vezana lista

- “idealna” struktura za realizaciju MergeSort algoritma, za razliku od polja. Što je problem kod polja?

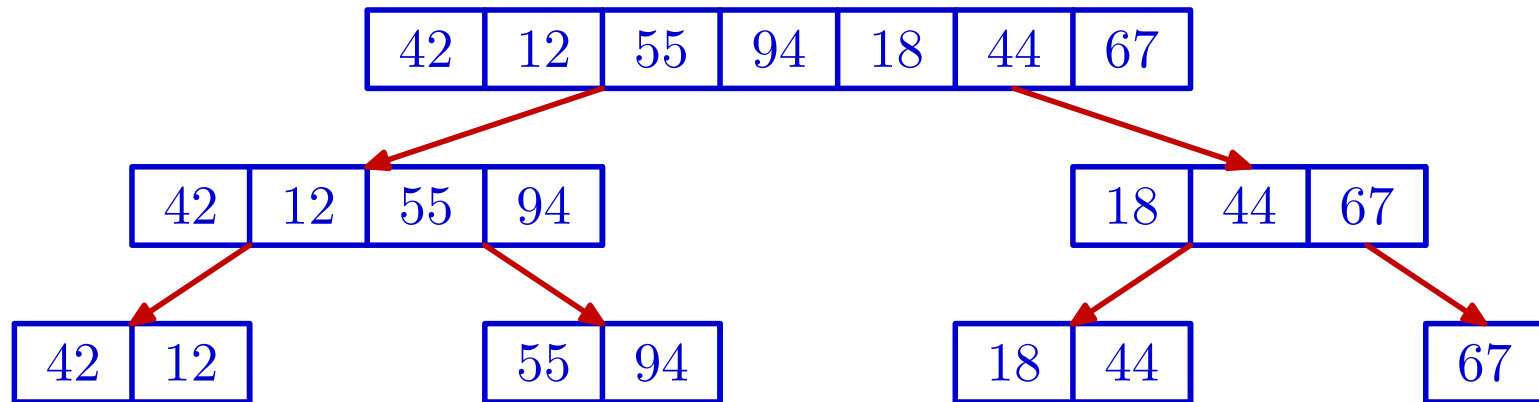
MergeSort — *primjer*

42	12	55	94	18	44	67
----	----	----	----	----	----	----

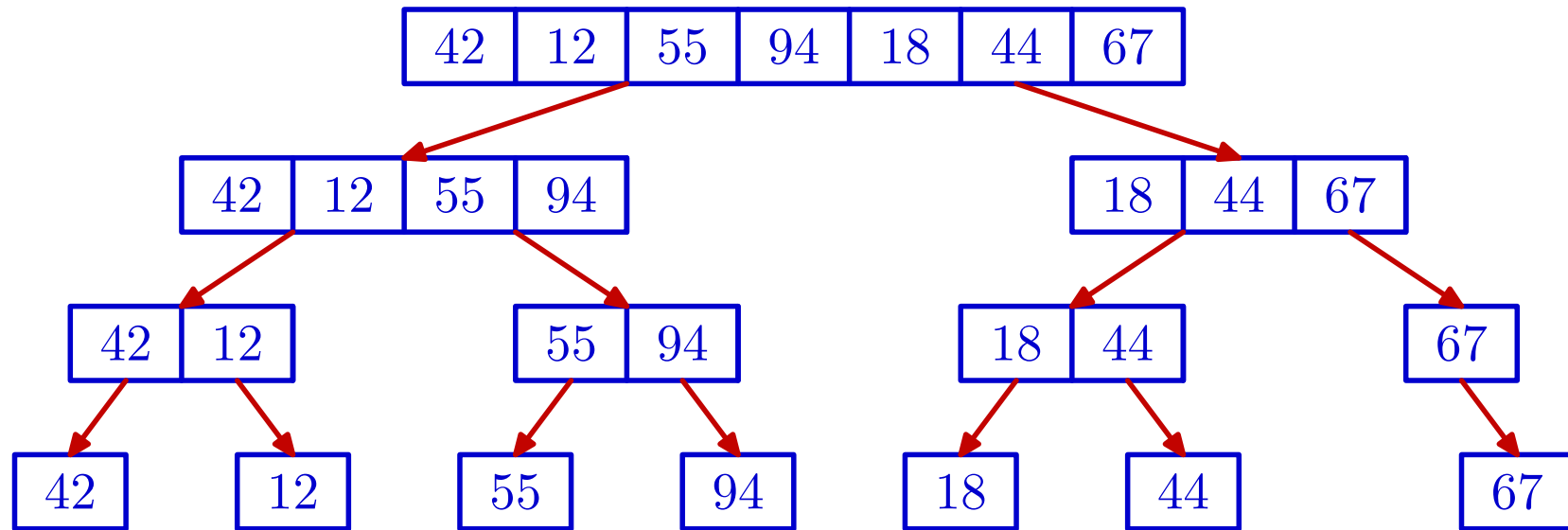
MergeSort — *primjer*



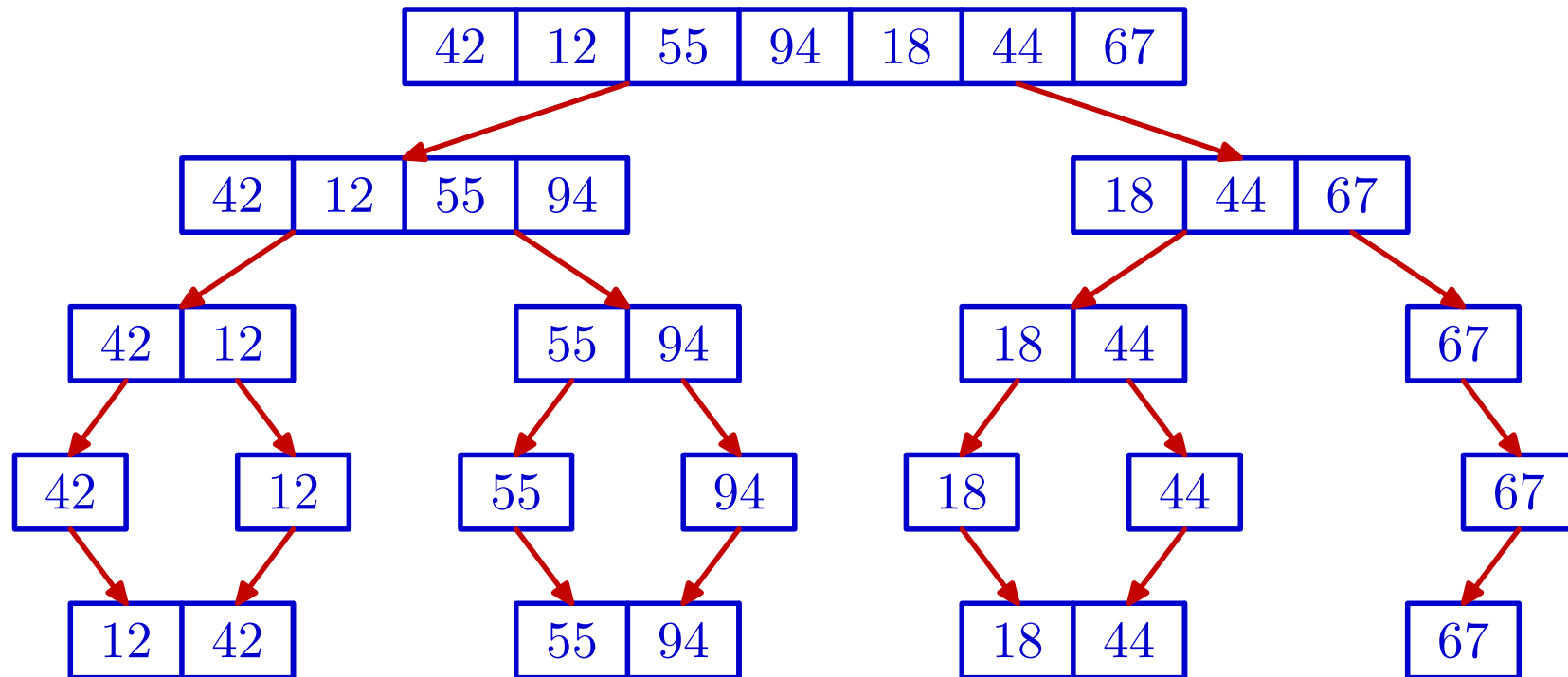
MergeSort — *primjer*



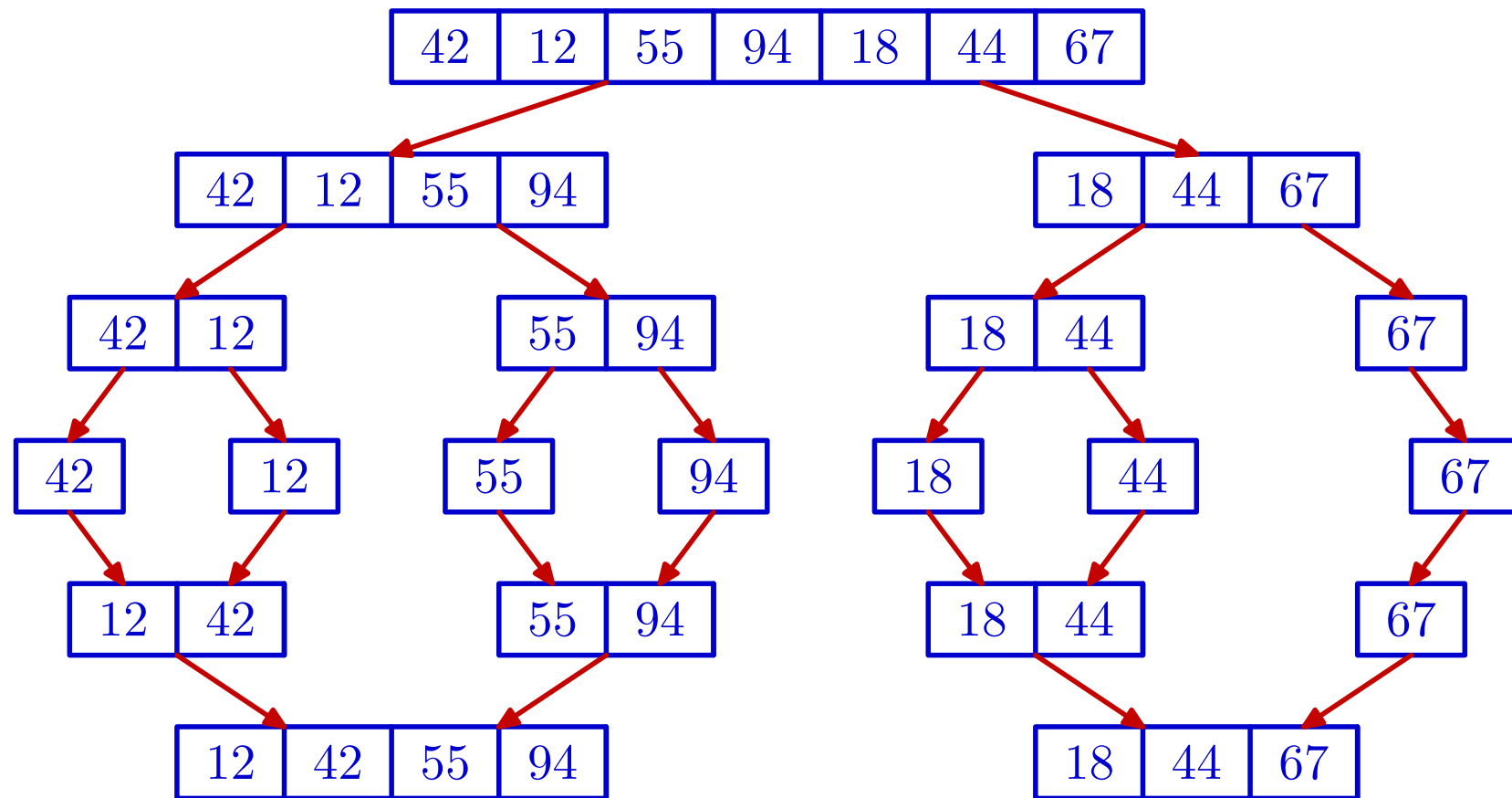
MergeSort — *primjer*



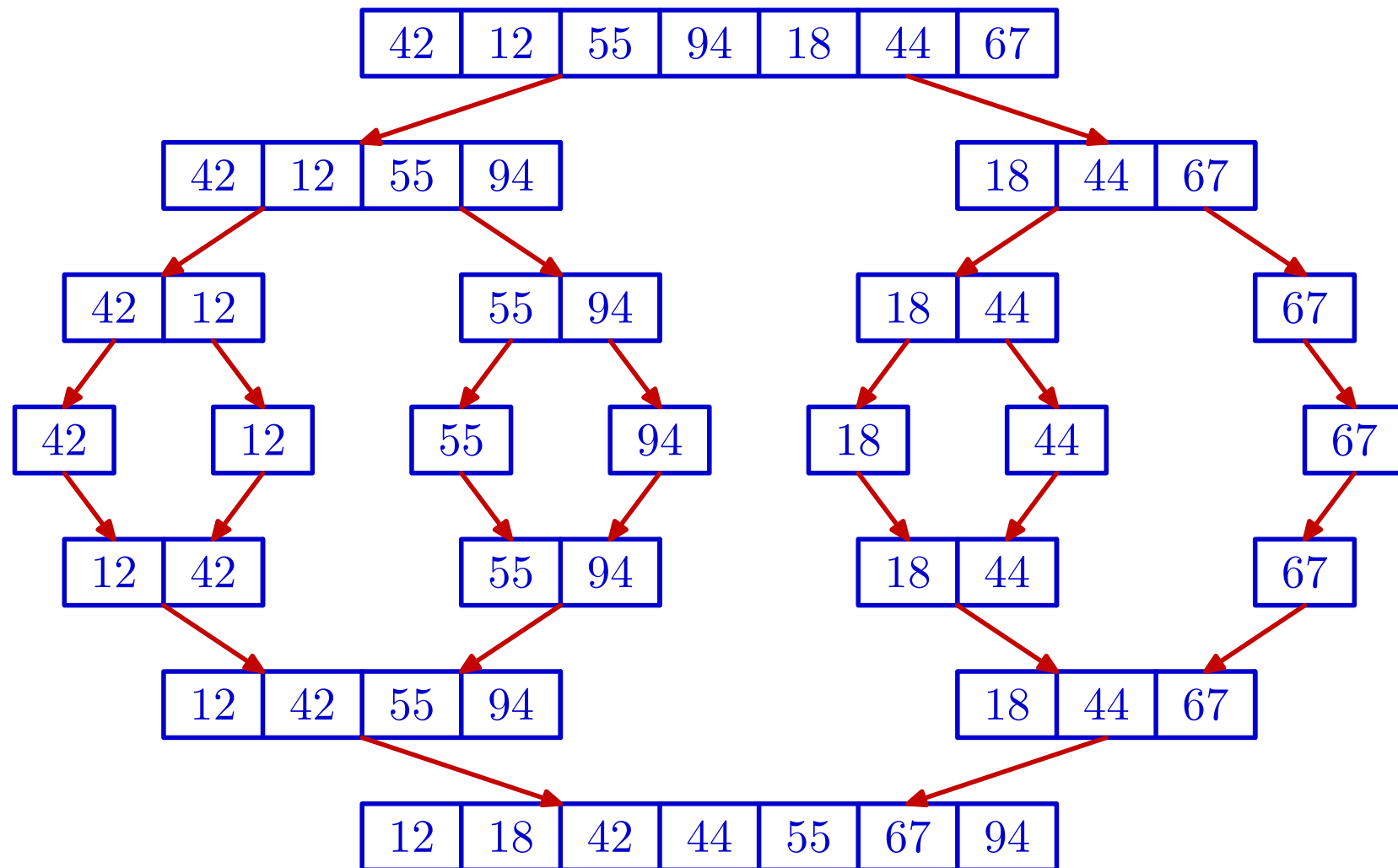
MergeSort — *primjer*



MergeSort — *primjer*



MergeSort — *primjer*



Sortiranje spajanjem — MergeSort (nastavak)

“Raspolavljanje” liste možemo realizirati na dva načina:

- 🕒 preko pokazivača, pažljivim “šetanjem” po listi — elegantnije, ali sporije (v. funkciju `merge_sort`),
- 🕒 brojanjem elemenata u listi — brže, ali treba dodatni ulazni argument (napravite `sami`).

Složenost MergeSort algoritma (najgori slučaj): $O(n \log n)$.

Dokaz. Slijedi iz prethodne slike. Neka je n broj elemenata u nizu i neka je

$$2^{k-1} < n \leq 2^k,$$

tj. 2^k je najmanja potencija broja 2 veća ili jednaka n , odnosno, $k = \lceil \log_2 n \rceil$. Na slici je $n = 7$ i $k = 3$.

Složenost MergeSorta (nastavak)

Uzmimo da **polazni nesortirani** niz ima razinu (nivo) 0.

Nakon toga imamo **točno k** “horizontalnih” razina

- **raspolavljanja** podnizova — u **gornjem** dijelu slike, i

- **sortiranog spajanja** podnizova — u **donjem** dijelu slike.

Dakle, **broj** “radnih” **razina** na slici je $2k \approx 2 \log_2 n$.

Uočimo da svako **raspolavljanje** i svaki **merge**

- traje **linearно** u **duljini** “većeg” odgovarajućeg niza, jer **svaki** element u “većem” nizu “prolazimo” **najviše jednom**.

Ako nije očito, pogledajte pažljivo “**raspolavljanje**” u funkciji **merge_sort** i funkciju **merge**.

Složenost MergeSorta (nastavak)

Kad to **pozbrajamo** za **sve** podnizove na **istoj** razini,

- jer svaka razina ima **najviše** n “radnih” elemenata, zaključujemo da

- na **svakoj** razini imamo $O(n)$ operacija.

Kad **pomnožimo** broj **razina** i broj **operacija**, dobivamo da

- **ukupno** ima $O(n \log n)$ operacija.

Autor MergeSorta je **John von Neumann**, 1945. godine.

- To je **prvi** program napisan za računalu koje **sprema** i **programe** (von Neumannov model).

- Računalo se zvalo **EDVAC**.

Funkcija merge_sort

```
lista merge_sort(lista prvi)
{
    /* Sortira listu Merge_Sort algoritmom. */

    lista zadnji, prvi_2;

    /* Test na praznu ili jednoclanu listu. */

    if ((prvi == NULL) || (prvi->sljed == NULL))
        return prvi;
```

Funkcija merge_sort — *nastavak*

```
/* ‘‘Raspolovi’’ listu. Pokazivac zadnji  
pokazuje na zadnjeg u prvom dijelu.  
Pokazivac prvi_2 je trenutno pomocni  
i služi za raspolavljanje liste. */
```

```
zadnji = prvi;  
prvi_2 = prvi->sljed;
```

Funkcija merge_sort — *nastavak*

```
    /* Pomicemo zadnjeg za JEDNO mjesto,  
       a prvi_2 za DVA mjesta, sve dok  
       prvi_2 ne stigne do kraja liste. */  
  
    while ((prvi_2 != NULL) &&  
           (prvi_2->sljed != NULL)) {  
  
        zadnji = zadnji->sljed;  
        prvi_2 = prvi_2->sljed->sljed;  
    }  
  
    /* NE VALJA: (iz programa na webu)  
       prvi_2 = zadnji->sljed->sljed;  
    */
```

Funkcija merge_sort — *nastavak*

```
/* Pokazivac zadnji sad korektno pokazuje  
   na zadnjeg u prvom dijelu.  
   Pokazivac prvi_2 postavljamo na prvog  
   u drugom dijelu (prvi iza zadnjeg) i  
   korektno završavamo prvi dio. */
```

```
prvi_2 = zadnji->sljed;  
zadnji->sljed = NULL;
```

```
prvi = merge(merge_sort(prvi),  
             merge_sort(prvi_2));
```

```
return prvi;
```

```
}
```


MergeSort — demo-program

Program `l_9.c` kreira jednu listu oblika

🚶 42 -> 12 -> 55 -> 94 -> 18 -> 44 -> 67 -> NULL,

(standardni primjer niza podataka za algoritme sortiranja), a zatim sortira tu listu MergeSort algoritmom. Dobivena lista je

🚶 12 -> 18 -> 42 -> 44 -> 55 -> 67 -> 94 -> NULL.

Program `l_9w.c` radi to isto, s puno ispisa (za onu sliku).

Zadatak. Napišite funkciju za MergeSort liste kojoj stiže broj elemenata u listi.

Zadatak. Napišite funkciju za MergeSort na polju. Za merge (spajanje) smijete koristiti jedno dodatno pomoćno polje!