Umjetna inteligencija

5. Logika i zaključivanje

prof. dr. sc. Bojana Dalbelo Bašić
doc. dr. sc. Jan Šnajder

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

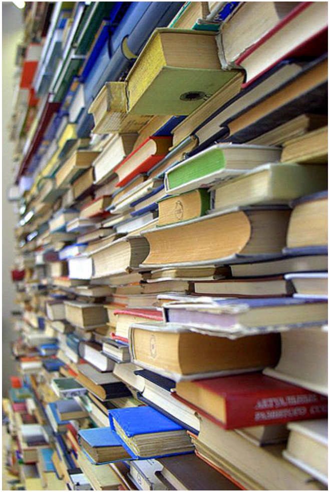
Ak. god. 2013./2014.

v1.11

Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Motivacija

- **Prikazivanje znanja** (engl. *knowledge representation*) središnji je problem umjetne inteligencije
- Rješavanje mnogih problema iz stvarnog svijeta iziskuje **goleme količine znanja**, čak i kada se ograničimo na neku usku domenu
- Drugi važan problem je **zaključivanje** (engl. *inference*): kako iz prikazanog znanja izvoditi novo znanje
- Na temelju zaključivanja sustav može donositi odluke, planirati, razumijevati prirodan jezik, dokazivati teoreme, itd.



Simbolizam vs. konektivizam

- Simbolička logika temeljni je alat **simboličkog pristupa** umjetnoj inteligenciji:

Simbolički pristup

Sve znanje iz eksternog svijeta može se prikazati **simbolima**. Zaključivanje se provodi **manipulacijom** nad tim simbolima. Inteligentno rasuđivanje ili ponašanje svodi se na zaključivanje.

- Tomu suprotan je **konektivistički pristup**:

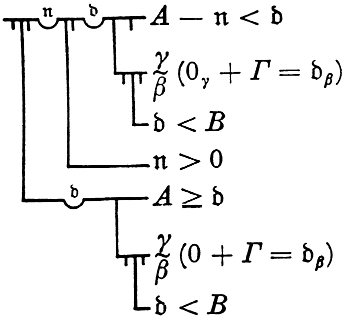
Konektivistički pristup

Mentalna stanja i ponašanje proizlazi iz **interakcije** velikog broja međusobno **povezanih jednostavnih** obradbenih jedinica. Tipična paradigma ovog pristupa jesu umjetne neuronske mreže.

- Držat ćemo se (još neko vrijeme) simboličkog pristupa

Simbolička logika

Simbolička logika (**matematička logika**) grana je matematike koja se bavi matematičkim konceptima izraženima u **formalnim logičkim sustavima**. Takvi sustavi omogućavaju apstraktno rasuđivanje



Gottlob Frege, *Begriffsschrift*, 1879.

Formalan logički sustav

Svaki sustav formalne logike sastoji se od tri komponente:

Komponente formalnog logičkog sustava

1. **Sintaksa** (engl. *syntax*) – opisuje jezične strukture koje sačinjavaju rečenice logike, odnosno definira formalna pravila za izgradnju logičkih formula
2. **Semantika** (engl. *semantics*) – opisuje značenje jezičnih struktura, npr. koje su jezične strukture istinite a koje lažne, ili koji je odnos jezičnih elemenata i objekata u stvarnosti
3. **Teorija dokaza** (engl. *proof theory*) – definira mehanizme koji omogućavaju zaključivanje, tj. izvođenje zaključaka iz danih premisa

- (1) i (2) omogućavaju prikazivanje znanja iz stvarnog svijeta
- (3) omogućava izvođenje novog znanja

Ekspresivnost logike

- Postoje razne vrste logike koje se razlikuju u navedene tri komponente
- Neki formalizmi su više, a neki manje **ekspresivni** (izražajni)
- Što je logika ekspresivnija, to je složenija njezina sintaksa, semantika i teorija dokaza. U logici koja je vrlo ekspresivna možemo detaljno opisati stanje svijeta
- S druge strane, što je logika ekspresivnija, to manje možemo dokazati
- Logiku u kojoj možemo provjeriti valjanost bilo koje formule zovemo **odlučivom** (engl. *decidable*)

Kompromis između ekspresivnosti i odlučivosti

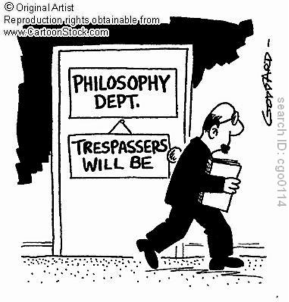
U načelu, što je logika ekspresivnija, to je u njoj manje toga moguće dokazati. Vrlo ekspresivni logički sustavi nisu odlučivi. Sustavi koji nisu vrlo ekspresivni su odlučivi, ali u njima se ne može puno toga prikazati.

- Ekspresivnost ovisi o **ontološkim** i **epistemološkim** pretpostavkama

Ontološke određenosti

Ontologija

Ontologija je filozofska disciplina (grana metafizike) koja se bavi pitanjima **postojanja i stvarnosti**, odnosno pitanjem koji entiteti postoje i kakvi su njihovi međusobni odnosi



Ontološke određenosti (engl. *ontological commitments*)

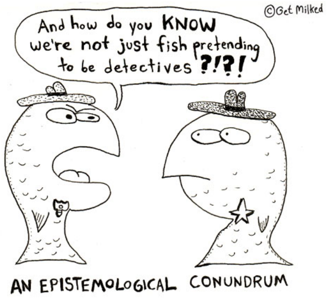
Ontološke određenosti definiraju što pretpostavljamo da u svijetu postoji. Npr., kod **propozicijske logike** pretpostavljamo da se svijet sastoji od činjenica koje su istinite ili lažne, **vremenska logika** dodatno pretpostavlja da u svijetu postoji uređaj vremenskih trenutaka, itd.

- **NB**: Riječ **ontologija** u umjetnoj inteligenciji ima dodatno značenje: formalan prikaz znanja unutar neke domene (no o tome kasnije)

Epistemološke određenosti

Epistemologija

Epistemologija je je grana filozofije koja se bavi **znanjem** – njegovom prirodom i njegovim dosegom, izvorom i ograničenjem.



Epistemološke određenosti (engl. *epistemological commitments*)

Epistemološke određenosti definiraju moguća stanja znanja. Npr., kod **propozicijske logike** svaka je činjenica ili istinita ili lažna. Nije moguće da je neka činjenica djelomično istinita, da je nesigurna, ili da u nju samo vjerujemo. Postoje vrste logika koje imaju takve epistemološke određenosti koje omogućavaju iskazivanje vjerovanja i različitih stupnjeva pouzdanosti.

Vrste logike

- Propozicijska logika (logika sudova)
- Predikatna logika (logika objekata)
- Vremenska logika (engl. *temporal logic*)
- Opisna logika (engl. *description logic*)
- Neizrazita logika (engl. *fuzzy logic*)
- Modalna logika (engl. *modal logic*)
- Epistemička logika
- ...

Mi ćemo se usredotočiti na propozicijsku logiku. Ta logika ima minimalne pretpostavke: postoje činjenice koje su istinite ili lažne.

Drugi put ćemo razmatrati predikatnu logiku, koja je ekspresivnija.

Sintaksa propozicijske logike (1)

Simboli propozicijske logike

(1) Skup **propozicijskih varijabli** ili **atomičkih formula**, $V = \{A, B, C, \dots\}$

(2) **Logički operatori** ili logički veznici:

- $\neg$ (negacija)
- $\vee$ (operator *ili*)
- $\wedge$ (operator *i*)
- $\rightarrow$ (implikacija)
- $\leftrightarrow$ (ekvivalencija)

(3) Logičke konstante $True$ i $False$ koje označavaju uvijek istinitu odnosno uvijek lažnu propoziciju

(4) Znakovi zagrada (i)

Sintaksa propozicijske logike (2)

Dobro oblikovana formula (wff)

Dobro oblikovana formula (engl. *well-formed formula*, wff) ili, jednostavnije, **formula** propozicijske logike definirana je rekurzivno

(1) Atom je formula

(2) Ako je F formula tada je i $(\neg F)$ formula

(3) Ako su F i G formule tada su formule:
   - $(F \wedge G)$
   - $(F \vee G)$
   - $(F \rightarrow G)$
   - $(F \leftrightarrow G)$

(4) Ništa drugo nije wff

- Dopuštamo izostavljanje zagrada u pravilu (2). Dopuštamo izostavljanje vanjskih zagrada u pravilu (3).

Sintaksa propozicijske logike – primjeri

Primjeri atoma:

- $A =$ *"Zemlja je okrugla"*
- $B =$ *"Harry Potter se školuje u Hogwartsu"*
- $C =$ *"Propozicijska logika je najmoćnija shema za prikaz znanja"*
- $D =$ *"Minotaur je mitsko biće"*

Primjeri formula:

- C
- $\neg C$
- $((A \vee B) \vee \neg C)$
- $(((B \vee D) \wedge (\neg B \vee C)) \rightarrow (A \vee C))$
- $((C \vee D) \rightarrow (\neg A \leftrightarrow B))$

Semantika propozicijske logike

Interpretacija

Neka je F dobro oblikovana formula propozicijske logike te neka su $E_1, E_2, \dots, E_n$ propozicijske varijable koji se u njoj pojavljuju.

Interpretacija $I : V \to \{\top, \bot\}$ formule F jest pridjeljivanje vrijednosti istinitosti iz skupa $\{\top, \bot\}$ varijablama iz skupa V.

Funkcija I svakoj propozicijskoj varijabli E_i pridjeljuje vrijednost $I(E_i) = \top$ (istinito) ili vrijednost $I(E_i) = \bot$ (lažno), ali ne i oboje.

- Formula koja ima n atoma ima 2^n različitih interpretacija
- Svaka interpretacija I opisuje jednu moguću **situaciju u svijetu**

Semantika logičkih operatora

Tablice istinitosti

F	G	$\neg F$	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

- Svi operatori imaju "prirodnu" semantiku (kao u jeziku), osim operatora $\rightarrow$, koji je manje intuitivan
- U formuli $F \rightarrow G$, formulu F nazivamo **antecedens**, a formulu G nazivamo **konzekvens**
- **NB**: Implikacija ne znači nužno uzročnost (kauzalnost). $F \rightarrow G$ ne znači da F uzrokuje G!

Provjera istinitosti formule

Istinitost formule

Za zadanu interpretaciju I, istinitost formule F definirana je rekurzivno:

$$
\begin{aligned}
I(\mathit{True}) &\equiv \top \\
I(\mathit{False}) &\equiv \bot \\
I(\neg F) &\equiv \neg I(F) \\
I(F \vee G) &\equiv I(F) \vee I(G) \\
I(F \wedge G) &\equiv I(F) \wedge I(G)
\end{aligned}
$$

- Npr., istinitost formule $((A \vee B) \wedge C) \wedge (\neg B \vee C)$ za interpretaciju $I(A) = \bot$, $I(B) = \top$, $I(C) = \top$:

$$
\begin{aligned}
&I(((A \vee B) \wedge C) \wedge (\neg B \vee C)) \equiv \\
&I((A \vee B) \wedge C) \wedge I(\neg B \vee C) \equiv \\
&(I(A \vee B) \wedge I(C)) \wedge (I(\neg B) \vee I(C)) \equiv \\
&((I(A) \vee I(B)) \wedge I(C)) \wedge (I(\neg B) \vee I(C)) \equiv \ldots
\end{aligned}
$$

Model

Model

Ako je formula F istinita u interpretaciji I, onda kažemo da je I **model** formule F.
Također kažemo da interpretacija I **zadovoljava** formulu F.

- Model opisuje jednu **situaciju**
- Npr., model formule $\neg A \wedge D$ je situacija u kojoj $A = \perp$ (*Zemlja nije okrugla*) i $D = \top$ (*Minotaur je mitsko biće*)
- Jedna formula može imati više modela, pa onda opisuje više situacija odjednom
- Npr., formula $A \vee D$ ima više modela. (Koje?)

Valjanost, proturječnost i zadovoljivost (1)

Valjana formula

Formula je **valjana** (**tautologija**) ako i samo ako je istinita za svaku svoju interpretaciju.

Proturječna formula

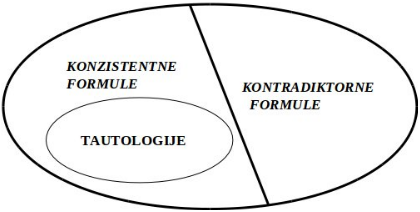
Formula je **proturječna** (**kontradikcija**, **nezadovoljiva**, **nekonzistentna** **antitautologija**) ako i samo ako je lažna za svaku svoju interpretaciju.

Zadovoljiva formula

Formula je **zadovoljiva** (**konzistentna**, **ispunjiva**) ako i samo ako je istinita barem za jednu interpretaciju.

Valjanost, proturječnost i zadovoljivost (2)

- Formula je zadovoljiva akko nije proturječna
- Formula je valjana akko je njezina negacija kontradikcija
- Ako je formula valjana, onda je i zadovoljiva, ali obrat ne vrijedi
- Ako formula nije valjana, onda ne znači da je proturječna
- Ako formula nije proturječna, onda je po definiciji zadovoljiva, ali ne mora biti valjana



Valjanost, proturječnost i zadovoljivost – primjeri

- P – zadovoljiva
- $P \vee Q$ – zadovoljiva
- $\neg(P \vee Q)$ – zadovoljiva
- $\neg P \wedge P$ – proturječna
- $P \wedge P$ – zadovoljiva
- $P \rightarrow Q$ – zadovoljiva
- $P \vee \neg P$ – valjana
- $(P \rightarrow Q) \wedge P$ – zadovoljiva
- $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ – valjana
- $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow \neg Q$ – zadovoljiva
- $P \leftrightarrow Q$ – zadovoljiva

Ekvivalencija

Ekvivalentne formule

Formula F je **ekvivalentna** formuli G, što označavamo kao $F \equiv G$, ako i samo ako su vrijednosti istinitosti formula F i G jednake za svaku moguću interpretaciju formula F i G

- **NB:** Ne treba brkati $F \equiv G$ i $F \leftrightarrow G$
- $F \equiv G$ nije formula propozicijske logike (jer $\equiv$ nije dio sintakse propozicijske logike)
- $F \leftrightarrow G$ je valjana formula akko vrijedi $F \equiv G$

Ekvivalencije propozicijske logike (1)

$$
\begin{array}{rlcll}
(1) & \neg\neg F & \equiv & F & \text{– involucija} \\
(2) & F \rightarrow G & \equiv & \neg F \vee G & \text{– ukl. implikacije} \\
(3) & F \rightarrow G & \equiv & \neg G \rightarrow \neg F & \text{– kontrapozicija} \\
(4) & F \rightarrow (G \rightarrow H) & \equiv & G \rightarrow (F \rightarrow H) & \\
(5) & F \rightarrow (G \rightarrow H) & \equiv & (F \wedge G) \rightarrow H & \\
(6) & F \leftrightarrow G & \equiv & (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G) & \\
(7) & F \leftrightarrow G & \equiv & (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) & \\
(8) & F \leftrightarrow G & \equiv & (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F) & \\
(9) & G \wedge G & \equiv & G & \text{– idempotencija} \\
(10) & G \wedge \mathit{True} & \equiv & G & \\
(11) & G \wedge \mathit{False} & \equiv & \mathit{False} & \\
(12) & G \wedge \neg G & \equiv & \mathit{False} & \text{– zakon kontradikcije} \\
(13) & G \vee G & \equiv & G & \text{– faktorizacija} \\
(14) & G \vee \mathit{True} & \equiv & \mathit{True} &
\end{array}
$$

Ekvivalencije propozicijske logike (2)

(15)	$G \vee False$	$\equiv$	G	
(16)	$G \vee \neg G$	$\equiv$	$True$	– isklj. trećega
(17)	$(F \wedge G) \wedge H$	$\equiv$	$F \wedge (G \wedge H)$	asocijativnost
(18)	$(F \vee G) \vee H$	$\equiv$	$F \vee (G \vee H)$	
(19)	$F \wedge G$	$\equiv$	$G \wedge F$	komutativnost
(20)	$F \vee G$	$\equiv$	$G \vee F$	
(21)	$F \vee (G \wedge H)$	$\equiv$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$	distributivnost
(22)	$F \wedge (G \vee H)$	$\equiv$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	
(23)	$\neg(F \vee G)$	$\equiv$	$\neg F \wedge \neg G$	de Morganovi zakoni
(24)	$\neg(F \wedge G)$	$\equiv$	$\neg F \vee \neg G$	
(25)	$F \vee (F \wedge G)$	$\equiv$	F	apsorpcija
(26)	$F \wedge (F \vee G)$	$\equiv$	F	
(27)	$F \vee (\neg F \wedge G)$	$\equiv$	$F \vee G$	
(28)	$F \wedge (\neg F \vee G)$	$\equiv$	$F \wedge G$	

Logička posljedica

- Koji zaključci slijede iz danih premisa?

Logička posljedica

Formula G je **logička (semantička) posljedica** formula $F_1, \dots, F_n$ ako i samo ako svaka interpretacija koja zadovoljava formulu $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ također zadovoljava formulu G.

Drugim riječima: formula G je logička posljedica formula $F_1, \dots, F_n$ akko je svaki model od $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$ ujedno i model od G.

Pišemo $F_1, F_2, \dots, F_n \vDash G$ i čitamo "$F_1, \dots, F_n$ **logički (semantički) povlači** (engl. *logically entails, semantically entails*) G".

- Logička posljedica je **znanje** koje slijedi iz premisa
- Epistemološki gledano, to znanje nije novo jer implicitno već postoji u premisama. Međutim, logička posljedica to znanje čini eksplicitnim

Logička posljedica – primjer

- Dokažimo da je Q logička posljedica formula $P \vee Q$ i $\neg P$, tj.:

$$P \vee Q, \neg P \models Q$$

- Konstruirajmo tablicu istinitosti:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	Q
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

- Premise imaju samo jedan model. To je ujedno i model formule Q, pa je Q po definiciji logička posljedica danih premisa

Logička posljedica, valjanost i proturječnost

- Da je formula F valjana označavamo kao $\models F$
- Po definiciji logičke posljedice, valjana formula je logička posljedica bilo kakvih premisa (pa tako i praznog skupa premisa)
- Npr.
  $\models P \vee \neg P$
  $Q \models P \vee \neg P$
- Također, po definiciji logičke posljedice, logička posljedica proturječne formule je bilo koja formula
- Npr.
  $P \wedge \neg P \models P$
  $P \wedge \neg P \models Q$

Dokazivanje logičke posljedice (1)

Izravan dokaz (engl. *direct method*)

Formula G je logička posljedica premisa $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ako i samo ako je

$$(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to G$$

valjana formula (tautologija). Drugim riječima:

$$F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \ \models \ G$$

ako i samo ako

$$\models (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to G$$

- Gornja tvrdnja zapravo je **teorem semantičke dedukcije** (engl. *semantic deduction theorem*)

Dokazivanje logičke posljedice (2)

- Formula $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G$ mora biti valjana, pa njezina negacija $\neg\big((F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow G\big) \equiv F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ mora biti proturječna

Dokaz opovrgavanjem (engl. *refutation method*)

Formula G je logička posljedica premisa $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ako i samo ako je

$$F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$$

proturječna formula (kontradikcija). Drugim riječima:

$$F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \ \models \ G$$

ako i samo ako

$$\models \neg\big(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G\big)$$

Dokazivanje logičke posljedice – primjer

- Dokažimo: $P \vee Q, \neg P \vDash Q$
- Izravan dokaz:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\overbrace{(P \vee Q) \wedge \neg P}^{F}$	$F \rightarrow Q$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$

- Dokaz opovrgavanjem:

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$\overbrace{(P \vee Q) \wedge \neg P}^{F}$	$\neg Q$	$F \wedge \neg Q$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Tri zadatka zaključivanja

(1) **Provjera modela** (engl. *model checking*): je li zadana interpretacija I model za formulu F, tj. je li formula F istinita uz interpretaciju I?

(2) **Provjera zadovoljivosti** ili **SAT-problem** (engl. *satisfiability checking*): ima li zadana formula F model, tj. postoji li ijedna interpretacija u kojoj je F istinita?

Problem se također naziva **izgradnja modela** (engl. *model building*).

(3) **Provjera valjanosti** (engl. *validity checking*): je li zadana formula F valjana, tj. istinita za svaku moguću interpretaciju?

- Što je s problemom **dokazivanja logičke posljedice**? On se svodi na problem provjere valjanosti (prema teoremu semantičke dedukcije)

Q: Jesu li navedeni problemi računalno teški?

Složenost zaključivanja (1)

- Problem provjere modela vrlo je jednostavan. Za propozicijsku logiku, taj je problem **odlučiv**: za svaku formulu F i interpetaciju I dobivamo u konačno mnogo koraka odgovor je li I model od F
- Problem provjere modela odlučiv je također i za predikatnu logiku (uz neka manja ograničenja)
- Alat koji radi provjeru modela zove se **provjernik modela** (engl. *model checker*)
- Problemi provjere valjanosti i zadovoljivosti (SAT) su teži! Zapravo, ta dva problema jednako su teška, jer su to dualni problemi:

Formula F je valjana akko $\neg F$ nije zadovoljiva

- Dakle, ako imamo algoritam koji rješava SAT-problem, možemo ga koristiti i za provjeru valjanosti, a to onda znači da možemo dokazivati logičke posljedice

Složenost zaključivanja (2)

- U propozicijskoj logici, SAT-problem je **odlučiv**: postupkom od konačno mnogo koraka možemo utvrditi ima li zadana formula model
- Premda odlučiv, problem je **netraktabilan**: složenost je $\mathcal{O}(2^n)$, gdje je n broj propozicijskih varijabli (trebamo ispitati 2^n redaka tablice)
- Zapravo, SAT-problem jedan je od prvih poznatih **NP-potpunih** problema (Cook, 1971)
- Nažalost, u predikatnoj logici (i mnogim drugim logikama) SAT-problem **nije odlučiv**: ne postoji algoritam koji bi mogao provjeriti zadovoljivost svih formula
- Algoritmi koji rješavaju SAT-problem nazivaju se **SAT-rješavači** (engl. *SAT-solvers*). U propozicijskoj logici mogu riješiti sve probleme, ali u predikatnoj samo neke probleme (zbog neodlučivosti)

Primjer: Diplomatski problem (1)

Diplomatski problem

Kao predstavnik protokola, zaduženi ste poslati pozivnice za diplomatski bal koji se održava u ambasadi. Međutim, postoje ograničenja:

(1) Veleposlanik želi da, ako pozovete Tursku, svakako pozovete i UK

(2) Pomoćnik veleposlanika želi da pozovete Tursku ili Argentinu, ili obje.

(3) Zbog nedavnog diplomatskog incidenta, ne možete pozvati i UK i Argentinu.

Koga ćete pozvati?

- Logički prikaz problema:
  $(T \rightarrow U) \wedge (T \vee A) \wedge \neg(U \wedge A)$
- **Q:** O kojem se zadatku ovdje radi (provjera modela, provjera zadovoljivosti, provjera valjanosti)?

Primjer: Diplomatski problem (2)

- Radi se o zadatku provjere zadovoljivosti. Zanima nas postoji li model za zadanu formulu (i koji je to model)
- Trebamo ispitati 2^3 interpretacija
- Rješenje (ukupno 2 modela):
  $I(U) = \top$, $I(T) = \top$, $I(A) = \bot$
  $I(U) = \bot$, $I(T) = \bot$, $I(A) = \top$
- O kojem bi se zadatku radilo da je pitanje bilo:
  - "*Mogu li pozvati UK i Tursku, a ne pozvati Argentinu?*"
  - "*Pozivam li u svakom slučaju UK?*"
  - "*Ako pozovem Tursku, zovem li onda i Argentinu?*"

Problem s dokazivanjem semantičke posljedice

(1) **Netraktabilnost:**
- Moramo provjeriti 2^n interpretacija
- Zamislimo da želimo dokazati $F_1, \ldots, F_{100} \vDash F_1$. Trebali bismo provjeriti 1.27×10^{30} interpetacija. To je nemoguće!
- Osim toga, u ovom slučaju to je nepotrebno jer je *očigledno* da relacija logičke posljedice vrijedi

(2) **Neodlučivost:**
- U predikatnoj logici broj interpretacija je beskonačan, pa nemamo šanse sve ih ispitati

- Postoji li rješenje za ove probleme? Da, donekle
- Umjesto da se bavimo interpretacijama i modelima (semantikom), trebamo se baviti pravilima zaključivanja (teorijom dokaza)

Teorija dokaza (engl. *proof theory*)

- Ljudi ne zaključuju na način da dokazuju semantičku posljedicu (ne pokušavaju pronaći interpretaciju koja je istinita za F, a nije za G)!
- Umjesto toga, pokušavamo pokazati kako se G može **izvesti** iz premisa pomoću konačnog broja **pravila zaključivanja** (engl. *inference rules*)
- Svako pravilo zaključivanja treba biti *opravdano* i što jednostavnije
- Pravila zaključivanja omogućuju dobivanje novih formula na temelju zadanih premisa, bez eksplicitnog referenciranja na semantiku logike (istinosne vrijednosti propozicija)

Deduktivna posljedica

Deduktivna posljedica

Formula G je **dedukcija** (engl. *deduction*) ili **deduktivna posljedica** (engl. *deductive consequence*) formula $F_1, F_2, \ldots, F_n$ akko je G moguće **izvesti** (engl. *derive*) iz premisa $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pravilima zaključivanja.

Pišemo $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash G$ i čitamo "$F_1, \ldots, F_n$ **izvodi** (engl. *derives*) ili **deduktivno povlači** (engl. *deductively entails*) G".

Teorem

Formula G je **teorem** akko vrijedi $\vdash G$, tj. ako je formula G deduktivno izvediva iz praznog skupa premisa.

- Dokazati $F \vdash G$ je ekvivalentno kao dokazati $\vdash F \to G$
- Zato umjesto o izvođenju dedukcije govorimo o **dokazivanju teorema**

Dokazivanje teorema

- U umjetnoj nas inteligenciji zanima kako automatizirati dokazivanje
- Time se bavi područje **automatskog zaključivanja** (engl. *automated reasoning*) ili **automatskog dokazivanja teorema** (engl. *automated theorem proving*, ATP)
- U teoriji dokaza razvijeni su različiti **postupci dokazivanja** (engl. *proof methods*)
- Sustav koji implementira neki postupak dokazivanja naziva se **dokazivač teorema** (engl. *theorem prover*)
- Dokazivači teorema razlikuju se od provjernika modela po tome što se oslanjaju samo na "sintaktičke manipulacije simbola" (ne zamaraju se modelima i semantikom)
- Naravno, to što dokazivači teorema izvode mora biti **semantički ispravno**, dakle opravdivo u smislu modela

Pravila zaključivanja

- Primjer pravila zaključivanja:
  "Ako su dvije tvrdnje istinite, onda je istinita i njihova konjunkcija"

Pravilo konjunkcije

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad \text{ili} \qquad A, B \;\vdash\; A \wedge B$$

- Što je sa sljedećim pravilom?

$$A \vee B \;\vdash\; A$$

- Intuitivno, prvo pravilo je **semantički ispravno**, a drugo nije
- Da bi pravilo bilo ispravno, deduktivan zaključak koji njime izvodimo mora biti **logička posljedica premisa**

Ispravnost i potpunost pravila

Ispravnost

Pravilo zaključivanja je **ispravno** (engl. *sound*) ako, primijenjeno na skup premisa, izvodi formulu koja je **logička posljedica** tih premisa.

Formalno, pravilo zaključivanja r je ispravno ako i samo ako

$$\text{ako} \quad F_1, \ldots, F_n \vdash_r G \quad \text{onda} \quad F_1, \ldots, F_n \vDash G$$

Potpunost

Skup pravila R je **potpun** (engl. *complete*) ako i samo ako je njime moguće izvesti sve logičke posljedice:

$$\text{ako} \quad F_1, \ldots, F_n \vDash G \quad \text{onda} \quad F_1, \ldots, F_n \vdash_R G$$

Ispravnost i potpunost povezuju semantiku i teoriju dokaza (povezuju u oba smjera relacije $\vdash$ i $\vDash$)

Ispravnost i potpunost – primjer

- Dokažimo da je pravilo $F \to G, F \vdash G$ **(modus ponens)** ispravno. Trebamo dokazati $F \to G, F \vDash G$. Izravan dokaz:

F	G	$F \to G$	$(F \to G) \wedge F$	$((F \to G) \wedge F) \to G$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

- Dokažimo da pravilo $F \to G, G \vdash F$ **(abdukcija)** nije ispravno. Trebamo dokazati $F \to G, G \nvDash F$. Izravan dokaz:

F	G	$F \to G$	$(F \to G) \wedge G$	$((F \to G) \wedge G) \to F$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Postupci dokazivanja

- Automatsko zaključivanje koristi neki od postupaka dokazivanja
- Taj postupak mora biti semantički ispravan, a poželjno je da je potpun
- Razvijeni su mnogi postupci:
  - sustavi prirodnog zaključivanja (engl. *natural deduction systems*)
  - aksiomatski (hilbertovski) sustavi
  - sekventni računi (engl. *sequent calculi*)
  - tableau-metoda
  - metoda rezolucije (engl. *resolution method*)

Mi ćemo se usredotočiti na metodu rezolucije. Ta je metoda ispravna i potpuna te se lako implementira na računalu.

Pravila prirodnog zaključivanja

- Pravila prirodnog zaključivanja (engl. *natural deduction*) (Gentzen, 1935) najbliža su su "prirodnom" načinu zaključivanja
- Pravila ima desetak (ovisno o verziji). Neka od pravila:

$$\begin{array}{lll}
(1) & F, G \ \vdash F \wedge G & \text{– uvođenje konjukcije} \\
(2) & F \wedge G \ \vdash \ F & \text{– eliminacija konjukcije} \\
(3) & F \ \vdash \ F \vee G & \text{– uvođenje disjunkcije} \\
(4) & F, F \rightarrow G \ \vdash \ G & \text{– modus ponens} \\
(5) & \neg G, F \rightarrow G \ \vdash \ \neg F & \text{– modus tollens} \\
(6) & F \rightarrow G, G \rightarrow H \ \vdash \ F \rightarrow H & \text{– ulančavanje (silogizam)} \\
(7) & F, F \leftrightarrow G \ \vdash \ G & \\
\vdots & &
\end{array}$$

- Pravila nisu prikladna za automatsko zaključivanje jer ih je previše (iziskuju složenu upravljačku strukturu)

Metoda rezolucije

- **Metoda rezolucije** (metoda razrješavanja) koristi se u propozicijskoj logici i predikatnoj logici prvog reda
- Metodu je predložio J. Robinson 1965. godine
- Metoda se sastoji od samo jednog pravila zaključivanja:

Rezolucijsko pravilo

$$\frac{A \vee F \qquad \neg A \vee G}{F \vee G} \qquad \text{ili} \qquad A \vee F,\ \neg A \vee G \ \vdash \ F \vee G$$

što je ekvivalentno s:

$$\neg F \to A,\ A \to G \ \vdash \ \neg F \to G$$

- Prednost je što radimo sa samo jednim pravilom, a to bitno pojednostavljuje automatsko zaključivanje

Pravilo rezolucije – ispravnost

- Uvjerimo se da je pravilo rezolucije **ispravno**
- Trebamo dokazati da je deduktivna posljedica rezolucijskog pravila također i logička posljedica, tj. trebamo dokazati:

$$A \lor F,\ \neg A \lor G\ \models\ F \lor G$$

- Npr. izravnom metodom:

A	F	G	$\overbrace{A \lor F}^{P}$	$\neg A$	$\overbrace{\neg A \lor G}^{Q}$	$P \land Q$	$\overbrace{F \lor G}^{R}$	$(P \land Q) \to R$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Klauzula

- Rezolucijsko pravilo može se primijeniti samo na disjunkcije
- Ako želimo primjenjivati isključivo rezolucijsko pravilo, premise trebaju biti u obliku disjunkcije. Takav oblik nazivamo **klauzula**

Klauzula (engl. *clause*)

Literal je atom ili njegova negacija. **Klauzula** je disjunkcija konačnog broja literala G_i:

$$G_1 \vee G_2 \vee \cdots \vee G_n, \quad n \geq 0$$

Klauzula koja sadrži samo jedan literal naziva se **jedinična klauzula** (engl. *unit clause*).

- Primjeri literala: A, F, $\neg A$, $\neg F$, G, $\neg G$
- Primjeri klauzula: $A \vee F$, $\neg A \vee G$, $A \vee \neg B \vee C \vee \neg D$, F

Rezolucija nad klauzulama

Rezolucijsko pravilo nad klauzulama

$$\frac{F_1 \vee \cdots \vee F_i \vee \cdots \vee F_n \qquad G_1 \vee \cdots \vee G_i \vee \cdots \vee G_m}{F_1 \vee \cdots \vee F_{i-1} \vee F_{i+1} \vee \cdots \vee F_n \vee G_1 \vee \cdots \vee G_{i-1} \vee G_{i+1} \vee \cdots \vee G_n}$$

gdje su F_i i G_i **komplementarni literali** (jedan je negacija drugoga).

Premise nazivamo **roditeljske klauzule**, a dedukciju nazivamo **rezolventa**.

- Primjeri:
  $A \vee B \vee \neg C,\ D \vee \neg B \vee E \ \vdash\ A \vee \neg C \vee D \vee E$
  $\neg A \vee B,\ A \ \vdash\ B$
  $A \vee B,\ A \vee \neg B \ \vdash\ A \vee A$
  $A \vee B,\ \neg A \vee \neg B \ \vdash\ B \vee \neg B$
  $A \vee B,\ \neg A \vee \neg B \ \vdash\ A \vee \neg A$

Konjunktivna normalna forma

- Ako su premise klauzule, skup premisa je **konjunkcija klauzula** (premise su implicitno povezane operatorom $\wedge$)
- **Q:** Ograničava li to primjenu rezolucije? **A:** Ne!
- Bilo koju formulu propozicijske logike moguće je prikazati kao konjunkciju klauzula pretvorbom u **konjunktivnu normalnu formu**

Konjunktivna normalna forma (engl. *conjuctive normal form*, CNF)

Formula F je u **konjunktivnoj normalnoj formi** akko je F u obliku

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$$

pri čemu je F_i oblika

$$G_{i1} \vee G_{i2} \vee \cdots \vee G_{im}$$

gdje su G_{ij} literali (atomi ili njihove negacije).

Pretvorba u CNF

- Svaka se formula može pretvoriti u CNF u četiri slijedna koraka

Pretvorba formule u CNF

(1) Uklanjanje ekvivalencije: $F \leftrightarrow G \;\equiv\; (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$

(2) Uklanjanje implikacije: $F \rightarrow G \;\equiv\; \neg F \vee G$

(3) Potiskivanje negacije do atoma:
$$\begin{aligned} \neg(F \vee G) &\equiv \neg F \wedge \neg G \\ \neg(F \wedge G) &\equiv \neg F \vee \neg G \end{aligned}$$

(4) Primjena distributivnosti: $F \vee (G \wedge H) \;\equiv\; (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

Svaki se korak ponavlja sve dok je primjenjiv.
U svim koracima, kad god je to moguće, primijenjuje se ekvivalencija za involuciju $\neg\neg F \equiv F$.

Pretvorba u CNF – primjer

$$(C \vee D) \to (\neg A \leftrightarrow B)$$

(1) Uklanjanje ekvivalencije:

$$\begin{aligned}&(C \vee D) \to (\neg A \leftrightarrow B)\\&(C \vee D) \to \big((\neg\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)\big)\end{aligned}$$

(2) Uklanjanje implikacije:

$$(C \vee D) \to \big((A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)\big)$$

(3) Potiskivanje negacije:

$$\neg(C \vee D) \vee \big((A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)\big)$$

(4) Primjena distributivnosti:

$$\begin{aligned}&(\neg C \wedge \neg D) \vee \big((A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A)\big)\\&\big((\neg C \wedge \neg D) \vee (A \vee B)\big) \wedge \big((\neg C \wedge \neg D) \vee (\neg B \vee \neg A)\big)\\&\big((\neg C \vee A \vee B) \wedge (\neg D \vee A \vee B)\big) \wedge \big((\neg C \wedge \neg D) \vee (\neg B \vee \neg A)\big)\\&\big((\neg C \vee A \vee B) \wedge (\neg D \vee A \vee B)\big) \wedge \big((\neg C \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee \neg B \vee \neg A)\big)\\&(\neg C \vee A \vee B) \wedge (\neg D \vee A \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee \neg B \vee \neg A)\end{aligned}$$

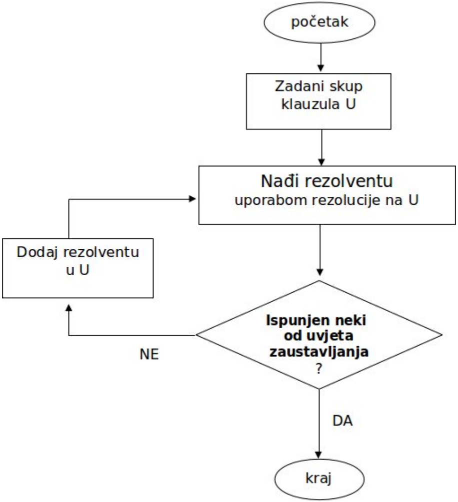
Klauzalni oblik

- Formula u konjunktivnoj normalnoj formi može se prikazati kao skup klauzula između kojih se implicitno podrazumijeva konjunkcija
- Klauzule se mogu prikazati kao skup literala između kojih se implicitno podrazumijeva disjunkcija
- Dakle, formula se može prikazati kao **skup skupova literala**
- To nazivamo **klauzalni oblik**
- Npr.:
  $(\neg C \lor A \lor B) \land (\neg D \lor A \lor B) \land (\neg C \lor \neg B) \;\Rightarrow$
  $\{\{\neg C, A, B\}, \{\neg D, A, B\}, \{\neg C, \neg B\}\}$
- Klauzule se također mogu pisati jedna ispod druge:
  $\neg C \lor A \lor B$
  $\neg D \lor A \lor B$
  $\neg C \lor \neg B$

Rezolucija

Postupak se ponavlja sve dok:

(1) izvedena je ciljna formula
(2) ne može se izvesti nova formula
(3) isrcpljeni su računalni resursi



Rezolucija – primjer

- Dokažimo rezolucijom: $A \to B, B \to C, A \ \vdash \ C$
- Premise u klauzalnom obliku:

  (1) $\neg A \vee B$
  (2) $\neg B \vee C$
  (3) A
- Rezolucijskim postupkom izvodimo:

  (4) $\neg A \vee C$ (iz 1 i 2)
  (5) C (iz 3 i 4)
- Ili:

  (4') B (iz 1 i 3)
  (5') C (iz 2 i 4')

Nepotpunost rezolucije

- Dokazali smo da je rezolucijsko pravilo ispravno. No je li potpuno?
- Lako je pokazati da rezolucijsko pravilo nije potpuno
- Npr., razmotrimo dedukciju $F \vdash F \vee G$
- Nju ne možemo izvesti rezolucijskim pravilom (zašto?)
- Međutim, vrijedi $F \models F \vee G$ (provjerite!)
- Budući da vrijedi $F \models F \vee G$, a da rezolucijskim pravilom ne možemo deduktivno izvesti $F \vdash F \vee G$, zaključujemo da rezolucijskim pravilom ne možemo dokazati sve logičke posljedice, pa zaključujemo da **rezolucijsko pravilo nije potpuno**
- Rezolucija koju smo do sada primjenjivali je **izravna rezolucija** (engl. *direct resolution*). Izravna rezolucija nije potpuna
- Postoji i **rezolucija opovrgavanjem** (engl. *refutation resolution*). Rezolucija opovrgavanjem jest **potpuna**

Rezolucija opovrgavanjem (1)

- Umjesto da dokazujemo $F_1, \dots, F_n \ \vDash \ G$, nastojimo dokazati da je $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$ proturječna formula
- Kao poseban slučaj rezolucijskog pravila imamo:

$$\frac{A \qquad \neg A}{\mathrm{NIL}}$$

- NIL označava prauznu klauzulu čija je semantička vrijednost $\perp$
- Ako rezolucijskim zaključivanjem izvedemo klauzulu NIL, onda znači da su premise proturječne. **Q:** Zašto?
- **A:** Zato što je rezolucijsko pravilo ispravno. Ako $F \vdash \mathrm{NIL}$, onda $F \vDash \mathrm{NIL}$. Ako $F \vDash \mathrm{NIL}$, onda F mora biti proturječno. **Q:** Zašto?
- **A:** Zbog definicije logičke posljedice. Ako je logička posljedica proturječna formula, onda premise također moraju biti proturječne

Rezolucija opovrgavanjem (2)

- Dokazano je (**ground resolution theorem**) da uvijek kada je skup klauzula proturječan, rezolucijom možemo izvesti klauzulu NIL
- To znači da uvijek možemo dokazati nekonzistentnost skupa klauzula
- A to znači da možemo dokazati svaku logičku posljedicu. **Q:** Zašto?
- **A:** Zato što $F \vDash G$ možemo dokazati metodom opovrgavanja tako da dokažemo da je $F \wedge \neg G$ proturječna formula
- A to onda znači da je rezolucija opovrgavanjem potpuna, zato što njome možemo dokazati bilo koju logičku posljedicu
- Dakle, rezolucija opovrgavanjem je **ispravna i potpuna**!
- Umjesto da koristimo izravnu rezoluciju, trebamo negirati ciljnu formulu G, dodati je premisama $F_1, \ldots, F_n$ i pokušati izvesti NIL
- Ako uspijemo, formula G je logička posljedica premisa, inače nije

Rezolucija opovrgavanjem – primjer 1

- Pokažimo da rezolucijom opovrgavanjem možemo dokazati $F \ \vdash \ F \vee G$:
- Negacija ciljne formule: $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
- Skup klauzula:

  (1) F
  (2) $\neg F$
  (3) $\neg G$

- Iz (1) i (2) izvodimo klauzulu NIL
- Dokazali smo da je skup klauzula proturječan odnosno da je $F \vee G$ deduktivna/logička posljedica premise F

Rezolucija opovrgavanjem – primjer 2

- Vratimo se na diplomatski problem. Premise su: $(T \to U) \land (T \lor A) \land \neg(U \land A)$
- Pretvorba u klauzalni oblik:

  (1) $U \lor \neg T$
  (2) $T \lor A$
  (3) $\neg U \lor \neg A$

- Dokažimo: *"Ako pozovem Tursku, neću pozvati Argentinu"*: $T \to \neg A$
- Negacija cilja: $\neg(T \to \neg A) \equiv \neg(\neg T \lor \neg A) \equiv T \land A$
- Nove klauzule:

  (4) T
  (5) A

- Rezolucijski postupak:

  (6) U (iz 1 i 4)
  (7) $\neg A$ (iz 3 i 6)
  (8) NIL (iz 5 i 7)

Faktorizacija

- Rezolucija opovrgavanjem je potpuna uz uvjet da su klauzule **faktorizirane**
- Faktorizacija je primjena ekvivalencije $G \vee G \equiv G$ kojom se višekratno pojavljivanje istog literala zamjenuje jednim literalom
- Primjer:
  $\neg A \vee \neg A,\ A \vee A\ \vdash\ A \vee \neg A$
- Skup klauzula je proturječan, a izveli smo valjanu formulu
- **Q:** Je li to ispravno? **A:** Naravno da jest. Valjana formula je logička posljedica bilo koje formule. Ali od toga nemamo koristi.
- Međutim, da smo napravili faktorizaciju, dobili bismo:
  $\neg A,\ A\ \vdash\ \mathrm{NIL}$
- Kako bismo zadržali potpunost, treba primjenjivati faktorizaciju kad god je to moguće

Algoritam rezolucije opovrgavanjem

Algoritam rezolucije opovrgavanjem (za propozicijsku logiku)

function $\mathrm{plResolution}(F, G)$
    $clauses \leftarrow \mathrm{cnfConvert}(F \wedge \neg G)$
    $new \leftarrow \emptyset$
    loop do
        for each (c_1, c_2) **in** $\mathrm{selectClauses}(clauses)$ **do**
            $resolvents \leftarrow \mathrm{plResolve}(c_1, c_2)$
            if $\mathrm{NIL} \in resolvents$ **then return** $true$
            $new \leftarrow new \cup resolvents$
        if $new \subseteq clauses$ **then return** $false$
        $clauses \leftarrow clauses \cup new$

- $\mathrm{cnfConvert}$ – pretvara formulu u konjunktivan normalan oblik
- $\mathrm{selectClauses}$ – odabire skup parova klauzula za razrješavanje
- $\mathrm{plResolve}$ – razrješava roditeljske klauzule i vraća skup rezolventi

Algoritam rezolucije opovrgavanjem – napomene

- Primjena rezolucijskog pravila na par klauzula može dati više rezolventi, pa zato radimo sa skupom rezolventi
- Kako bi se zadržala potpunost, potrebno je uvijek **faktorizirati** sve dobivene rezolvente
- Broj mogućih različitih klauzula je konačan (ako se provodi faktorizacija), pa algoritam sigurno završava u konačnom broju koraka
- Treba voditi računa o tome koji su parovi već bili razriješeni i ne razrješavati ih ponovo
- Izvođenje klauzule NIL iz skupa klauzula zapravo je **problem pretraživanja**: u svakom koraku trebamo odabrati par klauzula koje ćemo razriješiti
- Treba nam **strategija pretraživanja**, koja se u kontekstu rezolucije naziva **rezolucijska strategija**

Rezolucijske strategije

- Dvije vrste **rezolucijskih strategija**:
  - strategije pojednostavljenja (engl. *simplification strategies*)
  - upravljačke strategije (engl. *control strategies*)
- Strategije pojednostavljivanja uklanjaju redundantne i nevažne klauzule generirane tijekom postupka dokazivanja čime se sprječava njihovo daljnje nepotrebno razrješavanje
- Upravljačke strategije određuju način odabira roditeljskih klauzula
- Rezolucijska strategija treba biti **potpuna**: mora izvesti NIL, ako je skup klauzula nekonzistentan
- To ne treba brkati s potpunošću pravila zaključivanja (općenito, da bi postupak dokazivanja bio potpun, trebamo kombinirati potpuna pravila s potpunom strategijom pretraživanja)

Strategija pojednostavljenja

Strategija brisanja

Uklanjanje redundantnih klauzula:

- Klauzula koja je **pokrivena** (engl. *subsumed*) drugom klauzulom može se obrisati
- Prema ekvivalenciji apsorpcije: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$
- Ako se u skupu klauzula nađe par klauzula C_1 i C_2 takvih da $C_1 \subseteq C_2$, klauzula C_2 može se obrisati (klauzule su prikazane kao skupovi literala)

Uklanjanje nevažnih klauzula:

- Klauzula koja je **valjana** (tautologija) je nevažna (zašto?)
- Ako je rezolventa valjana klauzula, može ju se odmah pobrisati
- Provjera valjanosti klauzule je jednostavna: klauzula je valjana akko sadrži komplementaran par literala F_i i $\neg F_i$

Upravljačke rezolucijske strategije

Strategija zasićenja po razinama (engl. *level saturation strategy*)

- Rezolvente izvodimo razinu po razinu (kao kod pretraživanja u širinu): razrješavamo sve moguće parove klauzula na prvoj razini (početni skup klauzula), zatim na drugoj razini, itd.
- Na i-toj razini, roditeljske klauzule uzimaju se s razina 1 do $(i-1)$
- Ovo je potpuna strategija, ali je vrlo neučinkovita (problem kombinatorne eksplozije)

Strategija skupa potpore (engl. *set-of-support strategy*)

- **Skup potpore** je skup klauzula nastao negacijom ciljne formule i naknadnim dodavanjem izvedenih klauzula
- Barem jedna roditeljska klauzula uvijek mora biti iz skupa potpore
- Strategija je potpuna i u pravilu učinkovitija od strategije zasićenja (to više što je skup potpore manji)

Sažetak

- Postoje razne vrste logike koje se međusobno razlikuju po **ekspresivnosti**. Propozicijska logika je najjednostavnija
- Svaki logički sustav sastoji se **(1) sintakse, (2) semantike i (3) teorije dokaza**
- **Logička posljedica** je formula koja semantički slijedi iz premisa, a **deduktivna posljedica** je formula izvodena pravilima zaključivanja
- Pravila zaključivanja moraju biti **ispravna** i poželjno je da su **potpuna**
- Tri zadatka zaključivanja su **(1) provjera modela, (2) provjera zadovoljivosti i (3) provjera valjanosti**. Prvi je jednostavan, druga dva su netraktabilna, ali barem **odlučiva** u propozicijskoj logici
- **Rezolucija opovrgavanjem** (uz faktorizaciju i potpunu strategiju) je potpuna metoda dokazivanja

Sljedeća tema: Dokazivanje teorema u logici prvoga reda