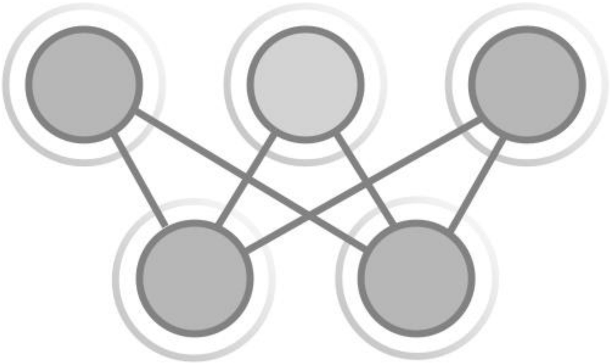
Prof.dr.sc. Bojana Dalbelo Bašić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elekroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

www.zemris.fer.hr/~bojana
bojana.dalbelo@fer.hr

Modeliranje neizvjesnosti



V1.1

- Inteligentno rješavanje problema podrazumijeva upravljanje i računanje s neizvjesnim podacima

- Uzroci:
  - podaci su nedostupni ili nedostaju,
  - postoje podaci, ali su nejasni ili nepouzdani (npr. zbog pogreške mjerenja),
  - predstavljanje podataka može biti neprecizno,
  - podaci se možda temelje na vrijednostima koje se podrazumijevaju, a one imaju iznimke

- Sustavi temeljeni na znanju koji uvažavaju neizvjesnost trebaju kod implementacije oblikovati sljedeća rješenja:

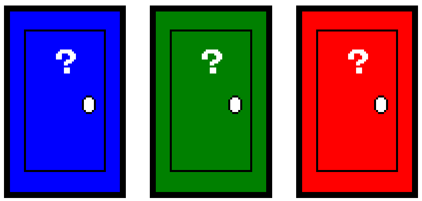
1. kako predstaviti neprecizne podatke,
2. kako kombinirati neprecizne podatake,
3. kako izvoditi zaključke iz neizvjesnih podataka

- **Četiri numerički orijentirana modela za oblikovanje neizvjesnosti:**

1. **Bayesova shema**
2. **Neizraziti skupovi i neizrazita logika**
3. Faktori izvjesnosti
4. Dempster-Shaferova teorija

Monty Hall problem

- Pretpostavite da ste u kvizu koji vodi Monty
- Dan vam je izbor između **triju vrata.** Iza jednih se nalazi automobil, a iza ostalih dviju, koze. Automobil i koze su slučajno raspoređene iza vrata prije početka emisije.



- Pravila igre su sljedeća: nakon što odaberete jedna vrata, ona ostaju zatvorena. Voditelj emisije, Monty Hall, koji zna što se nalazi iza kojih vrata, otvara jedna od dviju preostalih.

Monty Hall problem

- Ako od preostalih vrata jedna skivaju, automobil Monty otvara ona iza kojih je koza.
- Ako oba preostala vrata skrivaju kozu, Monty odabire jedna slučajno.
- Nakon što Monty otvori vrata koja skrivaju kozu, pita vas želite li ostati pri svom prvom izboru ili ćete uzeti ono što se nalazi iza preostalih vrata.

- Neka ste npr. odabrali vrata br. 1, a voditelj otvori vrata br. 3, koja su skrivala kozu.

  Hoćete li uzeti ono što se nalazi iza vrata br. 2 ili ostati pri izboru vrata br. 1?

.... Bayesova shema

BAYESOVA SHEMA

- najstarija metoda
- temelji se na klasičnoj teoriji vjerojatnosti

Osnove

slučajan pokus → slučajan događaj x_i

elementaran

složen

- $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ - **prostor elementarnih događaja**
- Događaj je podskup od X
- P(X) – **prostor svih mogućih događaja**

BAYESOVA SHEMA

- X – **siguran događaj**,
- $\varnothing$ – **nemoguć događaj**
- $\sim x_i$ – nije se dogodio x_i (**suprotan događaj**)
- $x_i \wedge x_j$ dogodio se događaj x_i i x_j (**presjek**)
- $x_i \vee x_j$ dogodio se događaj x_i ili x_j (**unija**)

- Vrijede zakoni klasične teorije skupova (komutativnost, asocijativnost, DeMorganovi zakoni itd.) za operacije s događajima!

- Ako je $x_i \wedge x_j = \varnothing$ - **događaji se isključuju**

Definicija

Vjerojatnost p je funkcija, $p : P(X) \rightarrow [0, 1]$

- $0 \leq p(x_i) \leq 1$, za $\forall x_i \in X$, i vrijedi $p(X) = 1$
- Ako se $x_1, x_2, \ldots, x_k$ međusobno isključuju tada vrijedi $p(\cup_i x_i) = \Sigma_i p(x_i)$

- Iz definicije $\Rightarrow p(x_i) + p(\sim x_i) = 1$ (1)

Definicija

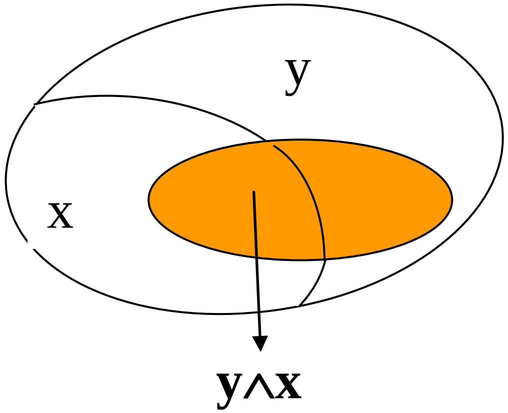
- Događaji x_1 i x_2 su **nezavisni** ako vrijedi
- $p(x_1 \wedge x_2) = p(x_1)\, p(x_2)$

Uvjetna vjerojatnost

- Neka su x i y događaji, tj. x, y $\subset$ X.
- Pretpostavimo da znamo da se dogodio događaj **x**
- *Zanima nas koja je vjerojatnost događaja **y** ako se dogodio **x**?*
- Ta se vjerojatnost naziva **uvjetna vjerojatnost - p(y|x)**.

Definicija

- **Uvjetna vjerojatnost** dana je sa $p(y|x) = \dfrac{p(x \wedge y)}{p(x)}$. (2)



X – prostor el. događaja

BAYESOVA SHEMA

Napomena: Ako su dva događaja x i y nezavisna, tada vrijedi $p(x|y) = p(x)$ i $p(y|x) = p(y)$

Izvod Bayesovog pravila

Prema definiciji, obrat, tj. vjerojatnost događaja x uz uvjet da se dogodio y je $p(x|y) = \dfrac{p(y \wedge x)}{p(y)}$ (3)

- Iz (3) $\Rightarrow p(y \wedge x) = p(x|y)p(y)$ (4)
- Zbog komutativnosti $p(x \wedge y) = p(x|y)p(y)$ (5)
- Uvrstimo (5) u (2) $\Rightarrow$ $p(y|x) = \dfrac{p(x \mid y)p(y)}{p(x)}$ (6)
- (6) je najjednostavniji oblik Bayesovog pravila

BAYESOVA SHEMA

$$p(y|x) = \frac{p(x \mid y)p(y)}{p(x)}$$

Nazivnik pravila:

- $p(x) = p(x \wedge X) = p(x \wedge (y \vee \sim y)) = p((x \wedge y) \vee (x \wedge \sim y))$ = prema (ii) iz definicije vjerojatnosti, $(x \wedge y) \cap (x \wedge \sim y) = \varnothing \Rightarrow$
  $p(x) = p(x \wedge y) + (x \wedge \sim y)$

- Svaki od članova se na temelju definicije uvjetne vj. može pisati:

$$p(x \wedge y) = p(x|y)p(y),$$

$$p(x \wedge \sim y) = p(x|\sim y)p(\sim y)$$

BAYESOVA SHEMA

Sada se nazivnik pravila p(x) piše:

- $p(x) = p(x|y)p(y) + p(x|\sim y)p(\sim y)$, (7)
- odnosno Bayesovo pravilo ima oblik

$$p(y|x) = \frac{p(x \mid y)p(y)}{p(x \mid y)p(y) + p(x \mid \sim y)p(\sim y)} \quad (8)$$

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

AKO je istinita hipoteza H ,

TADA zaključak/dokaz/činjenica E , s nekom vjerojatnošću *p*

Umjesto p(y|x) **.... p(E|H) = *p***

Interpretacija gornjeg AKO-ONDA pravila uz Bayesovu formulu:
H iz pravila (x u formuli) označava jednu **hipotezu** (engl. *hypothesis*)→ **H**,

E iz pravila (y u formuli) označava **činjenicu ili dokaz** (engl. *evidence*) → **E**

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

AKO je istinita hipoteza H ,

TADA zaključak/dokaz/činjenica E , s nekom vjerojatnošću *p*

Umjesto p(y|x) **.... p(E|H) = *p***

Primjer:

AKO *pacijent ima gripu* (H)

TADA *će pacijent imati hunjavicu* (E) s vjerojatnošću 0.75

p(E|H) =0.75

- OBRNUTO: Ako je istinito E (*pacijent ima hunjavicu*) što možemo zaključiti o H (*pacijent ima gripu*)?

p(H|E) ?

$$\frac{\begin{array}{c} E \\ H \rightarrow E \end{array}}{H}$$

Koje je to pravilo zaključivanja ?
Je li zdravo?

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

$$p(H|E) = \frac{p(E\,|\,H)p(H)}{p(E)} \qquad (9)$$

$$p(H|E) = \frac{p(E\,|\,H)p(H)}{p(E\,|\,H)p(H) + p(E\,|\sim H)p(\sim H)} \qquad (10)$$

Primjer:

- Ima li Ivan gripu (hipoteza), ako ima hunjavicu (činjenica)?

$$p(\text{gripa}|\text{hunjavica}) =$$

$$\frac{p(\text{hunjavica} \mid \text{gripa})p(\text{gripe})}{p(\text{hunjavica} \mid \text{gripa})p(\text{gripa}) + p(\text{hunjavica} \mid \sim \text{gripa})p(\sim \text{gripa})}$$

Pretpostavimo da znamo:

- p(H) = p(Ivan ima gripu) = 0.2 $\Rightarrow$ p(~H) = 0.8
- p(E|H) = p(Ivan ima hunjavicu | Ivan ima gripu) = 0.75
- p(E|~H) = p(Ivan ima hunjavicu | Ivan nema gripu) = 0.2

Tada:

- p(E) = p(Ivan ima hunjavicu) = (0.75)(0.2) + (0.2)(0.8) = 0.31
- (10) Bayesovo pravilo $\Rightarrow$ p(H|E) = p(Ivan ima gripu| ako je očito da Ivan ima hunjavicu) = $\frac{0.75 \cdot 0.2}{0.31} = 0.48387$

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

- Pomoću (10) također možemo odrediti vjerojatnost *hipoteze Ivan ima gripu* uz činjenicu da *Ivan nema hunjavicu:*
- p(H|~E) = $\dfrac{p(\sim \mathrm{E} \mid H)\, p(H)}{\mathrm{p}(\sim \mathrm{E})} = \dfrac{(1-0.75)(0.2)}{(1-0.31)} = 0.07246$

Usporedbom p(H|E) i P(H) **zaključujemo:**

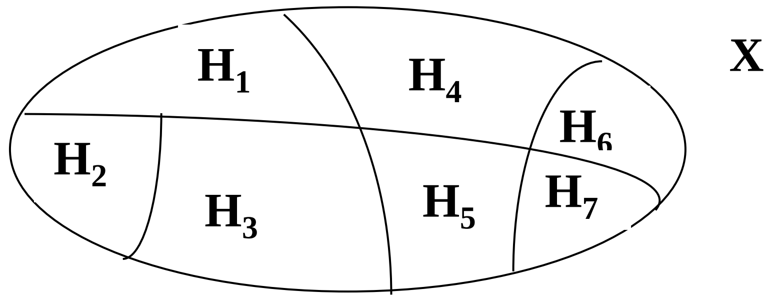
- Činjenica da Ivan ima hunjavicu povećava vjerojatnost da ima gripu za približno dva i pol puta

Usporedbom p(H|~E) i P(H) **zaključujemo:**

- Činjenica da Ivan nema hunjavicu smanjuje vjerojatnost da ima gripu za približno 2.8 puta

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

- Poopćenje Bayesove formule na *m* hipoteza $H_1, H_2, \ldots, H_m$, gdje su $H_1, H_2, \ldots, H_m$ međusobno isključive, tj. $H_i \cap H_j = \varnothing$ za $i \neq j$
  i unija $H_1, H_2, \ldots, H_m$ je cijeli prostor X tj. $\cup H_i = X$



(H_i sa takvim svojstvom naziva se potpun sustav događaja)

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

$$p(H_i | E) = \frac{p(E | H_i)\, p(H_i)}{p(E)} = \frac{p(E | H_i)\; p(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} p(E | H_k)\, p(H_k)} \quad , i=1,\ldots m. \qquad (10a)$$

- Poopćenje Bayesove formule na *m* hipoteza H_1, H_2,…, H_m i *n* činjenica (dokaza) E_1, E_2, ….,E_n.
- $p(H_i | E_1\, E_2 \ldots E_n) = \dfrac{p(E_1\, E_2 \ldots E_n | H_i)\, p(H_i)}{p(E_1 E_2 \ldots E_n)}$ = (nezavisnost)

$$= \frac{p(E_1 | H_i)\, p(E_2 | H_i) \ldots p(E_n | H_i)\, p(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} p(E_1 | H_k) p(E2 | H_k) \ldots p(E_n | H_k) p(H_k)} \qquad (11)$$

- Bayesova analiza

Notacija:

A_i, i=1, 2, 3 – automobil se nalazi iza vrata *i*

M_{ij}, i, j=1, 2, 3 – voditelj Monty odabrao je vrata *j* nakon što je igrač odabrao vrata *i*

I – prijašnje znanje

Npr. A_1 je označava "automobil se nalazi iza vrata 1", a M_{13} označava "voditelj je otvorio vrata 3 nakon što je igrač odabrao vrata 1".

Monty Hall problem

- Automobil može biti iza bilo kojih vrata, i sva vrata imaju jednaku *a priori* vjerojatnost da sakrivaju automobil. U našem slučaju, *a priori* znači "prije početka igre" ili "prije nego vidimo kozu".
- Dakle, *a priori* vjerojatnost događaja A_i jednaka je:

$$P(A_i|I) = 1 / 3, \qquad i = 1, 2, 3$$

Monty Hall problem

- Ako voditelj može birati između dvoja vrata, oba imaju jednaku vjerojatnost da budu odabrana.
- Nadalje, voditelj uvijek otvara vrata koja ne sakrivaju automobil, a odabire između onih koje igrač nije odabrao.
- Ova pravila određuju uvjetnu vjerojatnost događaja M_{ij} vezanog za događaj A_i:

- Uvjetnu vjerojatnost događaja M_{ij} vezanog za događaj A_i:

$$P(M_{ij}|A_k, I) = \begin{cases} 0 & \text{ako } i = j \text{ (voditelj ne može otvoriti vrata koja je odabrao igrač),} \\ 0 & \text{ako } j = k \text{ (voditelj ne može otvoriti vrata iza kojih se nalazi nagrada),} \\ 1/2 & \text{ako } i = k \text{ (ako je igrač pogodio vrata s nagradom, ostala dvoja vrata su jednako vjerojatna),} \\ 1 & \text{ako } i \neq k \text{ i } j \neq k \text{ (ostala su samo jedna vrata koja se mogu otvoriti)} \end{cases}$$

Monty Hall problem

- Problem možemo riješiti tako da izračunamo *a posteriori* vjerojatnost pobjede, pod uvjetom da je voditelj otvorio jedna vrata.
  Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je igrač odabrao vrata br. 1, te da je voditelj otvorio vrata br. 3, iza kojih se nalazi koza. Drugim riječima, voditelj je ostvario događaj M_{13}.
- Posteriorna vjerojatnost pobjede, bez zamjene vrata, pod uvjetom M_{13}, jest $P(A_1 \mid M_{13}, I)$. Koristeći Bayesov teorem, ovu vjerojatnost možemo raspisati kao:

$$P(A_1 \mid M_{13}, I) = \frac{P(M_{13} \mid A_1, I)\, P(A_1 \mid I)}{P(M_{13} \mid I)}$$

Monty Hall problem

- Iz navedenih pretpostavki, slijedi:

$$P(M_{13} \mid A_1, I) P(A_1 \mid I) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- Normalizacijska konstanta u nazivniku se može izračunati kao:

$$P(M_{13} \mid I) = P(M_{13}, A_1 \mid I) + P(M_{13}, A_2 \mid I) + P(M_{13}, A_3 \mid I)$$

$$\begin{aligned} P(M_{13} \mid I) = {} & P(M_{13} \mid A_1, I) P(A_1 \mid I) + \\ & P(M_{13} \mid A_2, I) P(A_2 \mid I) + \\ & P(M_{13} \mid A_3, I) P(A_3 \mid I) \end{aligned}$$

$$P(M_{13} \mid I) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

- Dakle,

$$P(A_1 \mid M_{13}, I) = \frac{1}{6} / \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

- Primjetite da je *a posteriori* vjerojatnost da je igrač iz prve pogodio vrata s nagradom **jednaka** *a priori* vjerojatnosti.
- Ukratko, akcije voditelja nisu donijele nikakvu novu informaciju ovom događaju. Voditeljeve akcije samo preraspodjeljuju preostalu vjerojatnost između drugih dvaju vrata.

Monty Hall problem

- Vjerojatnost pobjede ako igrač zamijeni svoja vrata s vratima br. 2 se može dobiti iz uvjeta da zbroj posteriornih vjerojatnosti za sve događaje C_i mora biti 1 (automobil se mora nalaziti iza jednih vrata):

$$P(A_1 \mid M_{13}, I) + P(A_2 \mid M_{13}, I) + P(A_3 \mid M_{13}, I) = 1$$

- Iza vrata br. 3 nema automobila (voditelj nam je to pokazao), pa je ta aposteriorna vjerojatnost 0. To možemo pokazati i Bayesovim teoremom:

$$P(A_3 \mid M_{13}, I) = \frac{P(M_{13} \mid A_3, I) P(A_3 \mid I)}{P(M_{13} \mid I)} = \left(0 \times \frac{1}{3}\right) / \frac{1}{2} = 0$$

- Dakle, slijedi

$$P(A_2 \mid M_{13}, I) = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

- Ovo pokazuje da je pobjednička strategija uvijek zamijeniti vrata.

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

Važna napomena:

- Bayesova formula (11) izvedena je uz pretpostavku da su činjenice E_i međusobno nezavisne ako je dana neka hipoteza
- Taj uvjet može ograničiti uporabu Bayesove sheme

- Podsjetnik: Dva su događaja nezavisna ako vrijedi

$$p(A \cap B)=p(A)\,p(B)$$

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

Primjer:

- Dva simptoma A i B mogu oba ukazivati na jednu bolest s nekom vjerojatnošću p. Međutim, ako su oba zajedno prisutna, onda se može desiti da pojačavaju jedan drugoga (ili su međusobno u suprotnosti)

Primjer:

- H_1 *Ivan ima prehladu*
- H_2 *Ivan ima alergiju*
- H_3 *Ivan je osjetljiv na svjetlo*

Tri međusobno isključive hipoteze

- E_1 *činjenica je da Ivan ima hunjavicu*
- E_2 *činjenica je da Ivan kašlje*

dokazi/ činjenice

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

	Vjerojatnosti a priori i uvjetne vjerojatnosti		
	i = 1	*i=2*	*i=3*
	(prehlada)	*(alergija)*	*(osjetljivost na svjetlo)*
$p(H_i)$	*0.6*	*0.3*	*0.1*
$p(E_1 \mid H_i)$	*0.3*	*0.8*	*0.3*
$p(E_2 \mid H_i)$	*0.6*	*0.9*	*0.0*

- *Ako je uočeno da pacijent ima hunjavicu, možemo izračunati* ***a posteriori vjerojatnosti*** *za hipoteze H_i, $i=1,3$ uporabom (10a)*

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

- $p(H_1|\ E_1) = \dfrac{0.3 \cdot 0.6}{0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1} = 0.4$
- $p(H_2|\ E_1) = \dfrac{0.8 \cdot 0.3}{0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1} = 0.53$
- $p(H_3|\ E_1) = \dfrac{0.3 \cdot 0.1}{0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1} = 0.06$
- Vjerovanje se smanjuje H_1(inicijalno 0.6) i H_3 (inicijalno 0.1)
- Vjerovanje se povećalo H_2 (inicijalno 0.3)

u prisustvu dokaza E_1

BAYESOVA SHEMA U PRODUKCIJSKIM SUSTAVIMA

- Ako je sada još primjećeno da pacijent i kašlje tada (n=2, i formula (11))

- $$p(H_1| E_1 E_2) = \frac{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6}{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1} = 0.33$$

- $$p(H_2| E_1 E_2) = \frac{0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3}{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1} = 0.67$$

- $$p(H_3| E_1 E_2) = \frac{0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1}{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1} = 0.00$$

- Hipoteza H_3 (osjetljivost na svjetlo) isključena je dok je H_2 puno vjerojatnija od H_1

PREDNOSTI I NEDOSTACI BAYESOVE SHEME

Prednosti

- Vrlo je dobro teoretski utemeljena,
- Najrazvijenija je od svih metoda za upravljanje i rješavanje neizvjesnosti

Nedostaci

- Potrebna je velika količina podataka o vjerojatnosti da bi se izgradila baza znanja.
- Sve vjerojatnosti trebaju biti zadane !

PREDNOSTI I NEDOSTACI BAYESOVE SHEME

Primjer

- Za sustav sa 50 mogućih pretpostavki (hipoteza) i 300 mogućih svojstava (činjenica) treba zadati **?** vjerojatnosti

  (uz pretpostavke da se hipoteze međusobno isključuju i da su činjenice uvjetno nezavisne)

- potrebno je unaprijed odrediti a priori vjerojatnosti i uvjetne vjerojatnosti – kako ?

  (statistički? , ekspert?)

PREDNOSTI I NEDOSTACI BAYESOVE SHEME

- za ekspertni sustav temeljen na Bayesovoj shemi teško je izraditi sustav za objašnjavanje izvedenih zaključaka

Primer primjene Bayesove sheme

- ekspertni sustav PROSPECTOR razvijen na Stanford University (Duda *et al.*, 1979) za otkrivanje nalazišta rudača na temelju zemljopisnih karakteristika

NEIZRAZITA LOGIKA

NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

- Koja svojstva vrijede za neizrazite skupove? Sve što i za klasične skupove (distributivnost, asocijativnost, komutativnost, idempotencija, De Morganovi zakoni…), ali ne vrijede zakon isključenja trećega i suprotni mu zakon – zakon kontradikcije

- Neizrazita logika = računanje s riječima

NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

- Ograničenja dvovrijednosne logike

Primjer

- Automehaničar opisuje riječima kako zaključuje zbog čega motor automobila neće startati. Ovo je izvadak iz tog opisa koji se odnosi na starost akumulatora kao jedan od uzroka problema

NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

- *“… <u>Povremeno</u>, ipak se može desiti da je akumulator <u>previše slab</u> da upali motor, ali ima dovoljno snage da svjetla normalno rade za neko kratko vrijeme. To se dešava <u>vrlo rijetko</u>, no normalni rad svjetla se čini u suprotnosti s pretpostavkom o istrošenom akumulatoru. Ono što trebate razmatrati u takvom slučaju jest starost akumulatora. <u>Stari</u> akumulator imat će značajan pad kapaciteta, dok će <u>novi</u> biti puno izdržljiviji. “*

NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

1. **Znanje je izraženo jezičnim izrazima čije značenje često nije jasno definirano** kao što su: povremeno, previše slab, vrlo rijetko, stari, novi, …

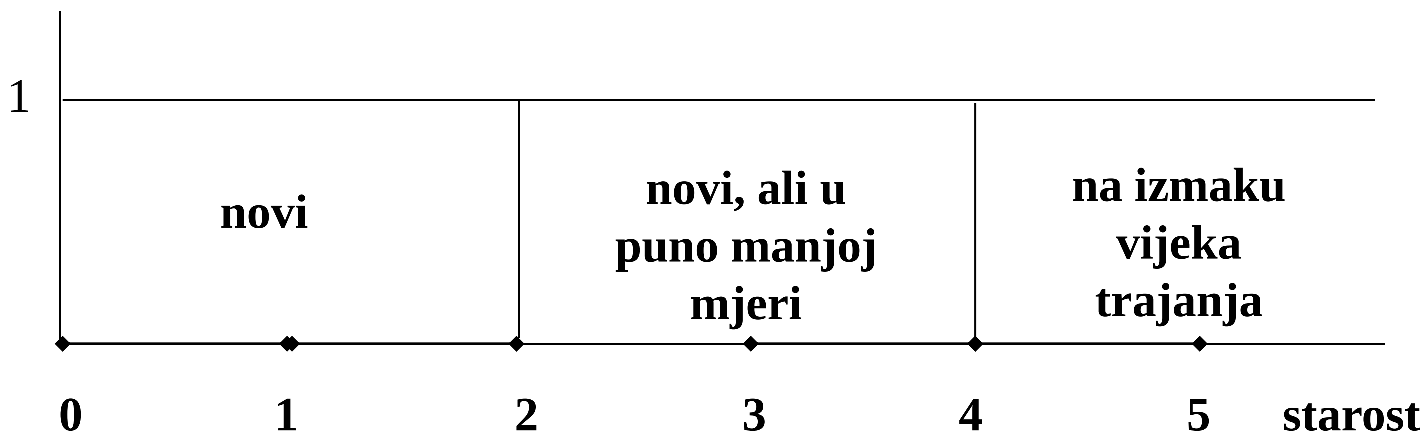
- Da bi znanje uobličili u neki tehnički sustav moramo znati što se podrazumijeva pod pojmovima kao što su *novi* ili *stari*
- Evo kako to mehaničar pokušava objasniti:

"Ako je akumulator <u>star dvije godine ili manje</u> tada bih ga smatrao **novim**. *Ako je star <u>između dvije i četiri godine</u> tada bih ipak rekao da je* ***novi, ali u puno manjoj mjeri***. *Akumulator <u>stariji od četiri</u> godine je* **na izmaku svog vijeka trajanja**…"

NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

- Automehaničar je pokušao objasniti što on podrazumijeva pod nejasnim jezičnim izrazima:

JEZIČNI IZRAZ	ZNAČENJE
"novi"	manje od 2 godine
"novi, ali u puno manjoj mjeri"	između 2 i 4 godine
"na izmaku vijeka trajanja"	više od 4 godine



NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

2. **Moguće je precizno definirati značenje nejasnih jezičnih izraza**, no u ovom slučaju pojmovi su definirani oštrim granicama na vremenskoj skali [0, ∞]

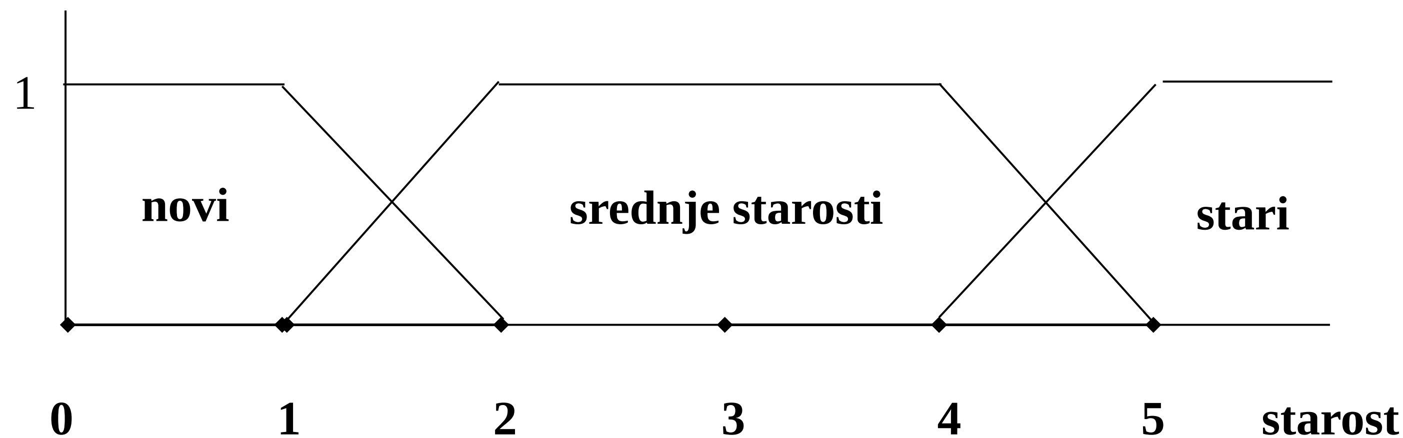
Da li je prirodno definirati izraze poput "stari" ili "novi" sa tako oštrim granicama?
Da li to znači da ako akumulator ima točno dvije godine da je još nov, a sutradan to više nije?

Takve granice daju neodgovarajući model. Starenje je neprekidni proces u kome nema naglih skokova

NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

3. Bilo bi prirodnije umjesto **oštrih** granica prilikom definicije nepreciznih jezičnih izraza govoriti **u kojoj je mjeri** neki akumulator star ili nov

- Ako umjesto pripadnosti ili nepripadnosti nekog elementa skupu govorimo o mjeri u kojoj neki element pripada nekom skupu onda govorimo o **neizrazitom skupu**



NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

4. **Znanje je subjektivno**: neki drugi automehaničar bi možda definirao da su granice 3 i 5 godina umjesto 2 i 4 godine. **Istom jezičnom izrazu mogu se pridjeliti različita značenja**

5. **Različiti jezični izrazi mnogu opisivati isti koncept** tj. mogu imati isto semantičko značenje: umjesto izraza “na izmaku vijeka trajanja mogli smo staviti izraz “stari” i sl.

6. ***Znanje je kontekstno zavisno**: stari*

akumulator

čovjek

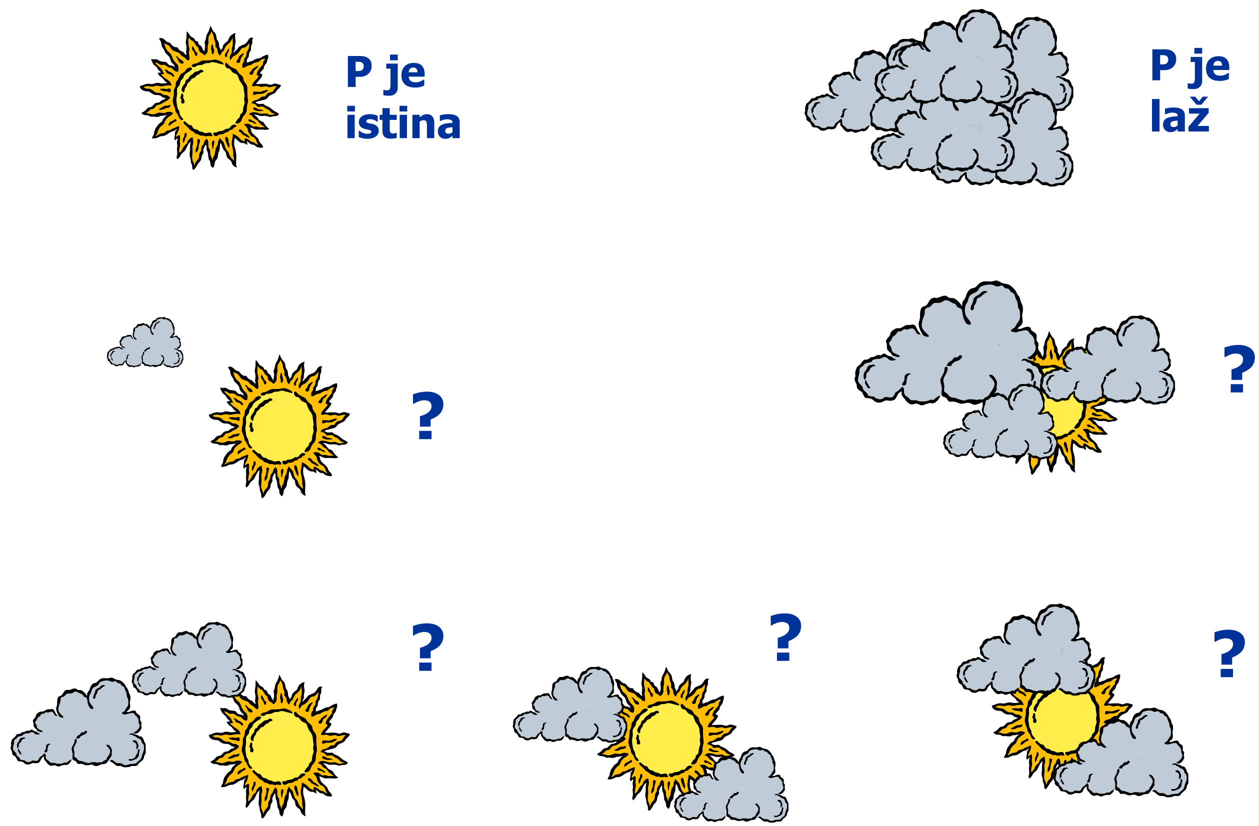
NEIZRAZITA LOGIKA I NEIZRAZITI SKUPOVI

- Klasična logika ne može oblikovati na odgovarajući način znanje koje je oblikovano riječima, nejasno, neprecizno i kontekstno zavisno. Ona ne može odrediti u kojoj mjeri neki element pripada ili ne pripada nekom skupu
- Te probleme je riješila neizrazita logika, odnosno neizrazita teorija skupova

> Neizrazita logika je formalan matematički model za oblikovanje ljudskog znanja i zaključivanje kada je znanje izraženo riječima, nejasno i neprecizno.

Zašto nam klasična logika nije dovoljna sa stajališta primjene u inteligentnim sustavima ?

p = “Danas je sunčan dan”



Dvije vrijednosti istinitosti nedostatne su za modeliranje zaključivanja zasnovanog na ljudskom znanju o realnom svijetu koje je često nepotpuno, nejasno, izraženo govornim jezikom i oblikovano atributima stupnjevite prirode.

Prevladavanje ograničenja klasične logike

1920.-tih godina - viševrijednosna logika – Ian Lukasiewicsz

L_2 {0,1} klasična logika

L_3 {0, 1/2, 1}

..

L_n {0, 1/n-1, 2/n-1, …. , n-2/n-1, 1}

L_∞ vrijednosti istinitosti $\in [0,1] \subset Q$

L_1 vrijednosti istinitosti $\in [0,1] \subset R$

Vagueness - Fuzziness

Oko **1920.** Bertrand Russell uveo izraz ***vagueness***

1937. Max Black - članak

"Vagueness: An Exercise in Logical Analysis", Philosophy of Science, Vol.4, 1937.

članak nije zadobio pažnju znanstvene javnosti

1965. Lotfi A. Zadeh – članak "**Fuzzy sets**", *Information and Control*, Vol.8, No.4, pp. 338-353, June 1965.

Neizraziti skup

Skup s nejasnim, “mekim” granicama !

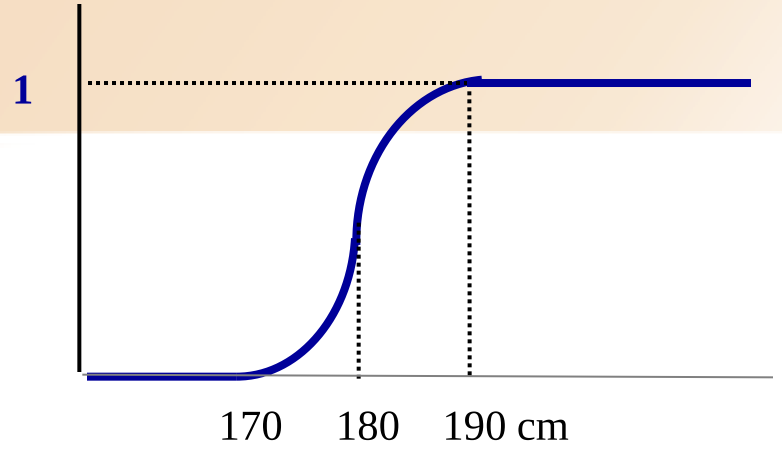
Klasičan skup $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$

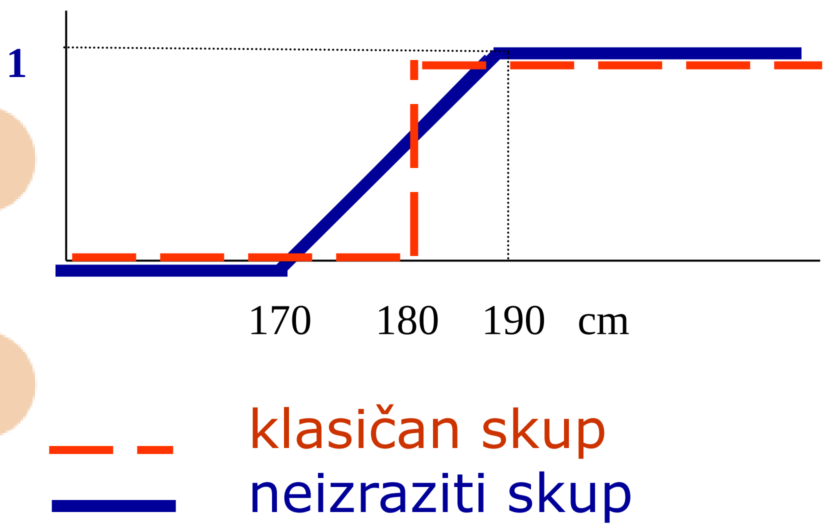
Neizraziti skup $\mu_{\mathbf{A}}$ **:** $X \rightarrow$ **[0 , 1]**

$\mathbf{A} = \{(\mathbf{x}, \mu_{\mathbf{A}}(x)) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \ \mu_{\mathbf{A}}(x) \in [0,1]\}.$

Primjer

Skup visokih ljudi





Definiranje funkcije pripadnosti neizrazitog skupa jest:

- **subjektivno**
- **kontekstno zavisno**

Neizrazitost - novi pogled na oblikovanje stvarnosti

- Ljudsko znanje o realnom svijetu: uobličeno riječima, puno nejasnih, nepreciznih izraza, subjektivno, kontekstno zavisno….
- Neizrazitost - nema jasnih (izrazitih!) granica između istine i laži, te između pripadnosti nekog elementa nekom skupu.

Sve je stvar **mjere!**

JEZIČNA VARIJABLA

- Neformalno, jezična ili lingvistička varijabla je varijabla koja umjesto uobičajenih numeričkih vrijednosti poprima vrijednosti u obliku riječi ili rečenica
- Jezična varijabla osigurava vezu između prirodnog jezika i kvantificiranja neizrazitih propozicija.

JEZIČNA VARIJABLA

- *Definicija* (jezična varijabla) [Zadeh, 1975]

  Jezična varijabla je petorka (x, Tx, U, G, Mx), gdje je :

  x - naziv jezične varijable;

  Tx - skup jezičnih vrijednosti (termina, izraza) koje može poprimiti jezična varijabla Tx $\rightarrow$ skup termina *(term-set)*;

  U univerzalni skup *(engl. universe of discourse)* je stvarna fizička domena u kojoj elementi iz T poprimaju numeričke vrijednosti. (U $\rightarrow$ kontinuiran ili diskretan);

  G je gramatika tj. skup sintaktičkih pravila koji generiraju skup T iz skupa osnovnih termina;

  Mx je semantička funkcija koja daje (kvantitativno) značenje (interpretaciju) jezičnim izrazima. Mx je funkcija koja $\forall$ x $\in$ T (tj. svakoj jezičnoj vrijednosti) pridružuje neki neizraziti podskup od U

JEZIČNA VARIJABLA

Primjer

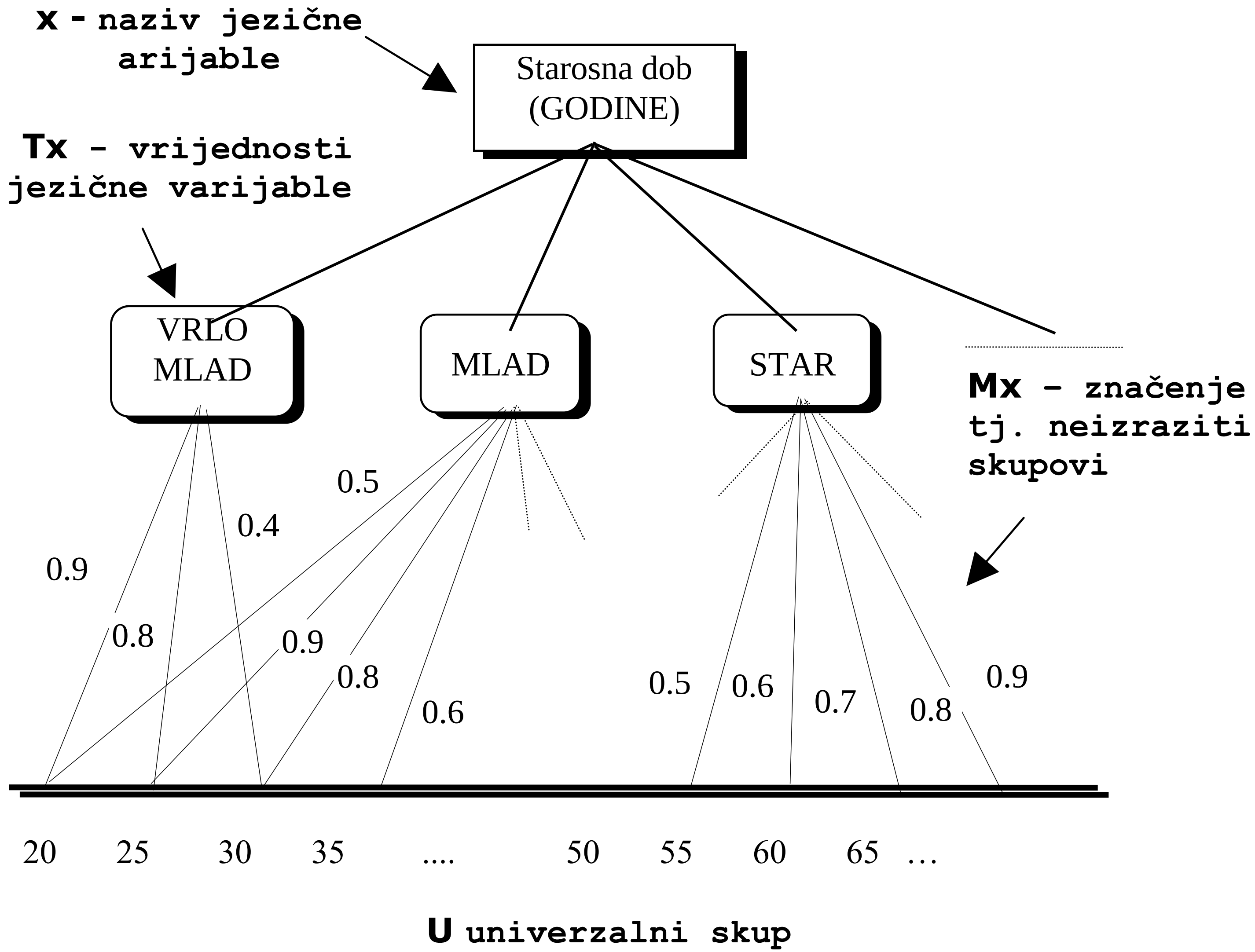
- Jezična varijabla: STAROSNA DOB

- x= STAROSNA DOB

- T(STAROSNA DOB) = mlad + nije mlad + vrlo mlad + ne vrlo mlad + vrlo vrlo mlad + … + srednjih godina + star + nije star + vrlo star + vrlo vrlo star + … + ne star i ne srednjih godina + …

- U = {0, 1, 2, 3, 4, …, 99, 100}

JEZIČNA VARIJABLA



JEZIČNA VARIJABLA

- Značenja osnovnih izraza (npr. *mlad* i *star*) su subjektivna i kontekstno zavisna i ta su značenja određena unaprijed.

- Pomoću gramatike moguće je generirati sve ostale vrijednosti skupa T iz ta dva osnovna izraza. Na primjer, izvedeni izrazi su: *vrlo mlad, ne vrlo mlad, vrlo vrlo star* itd.

- Primjeri ostalih jezičnih varijabli su*: toplina, istina, vjerojatnost, jasnoća* itd.

JEZIČNI MODIFIKATORI

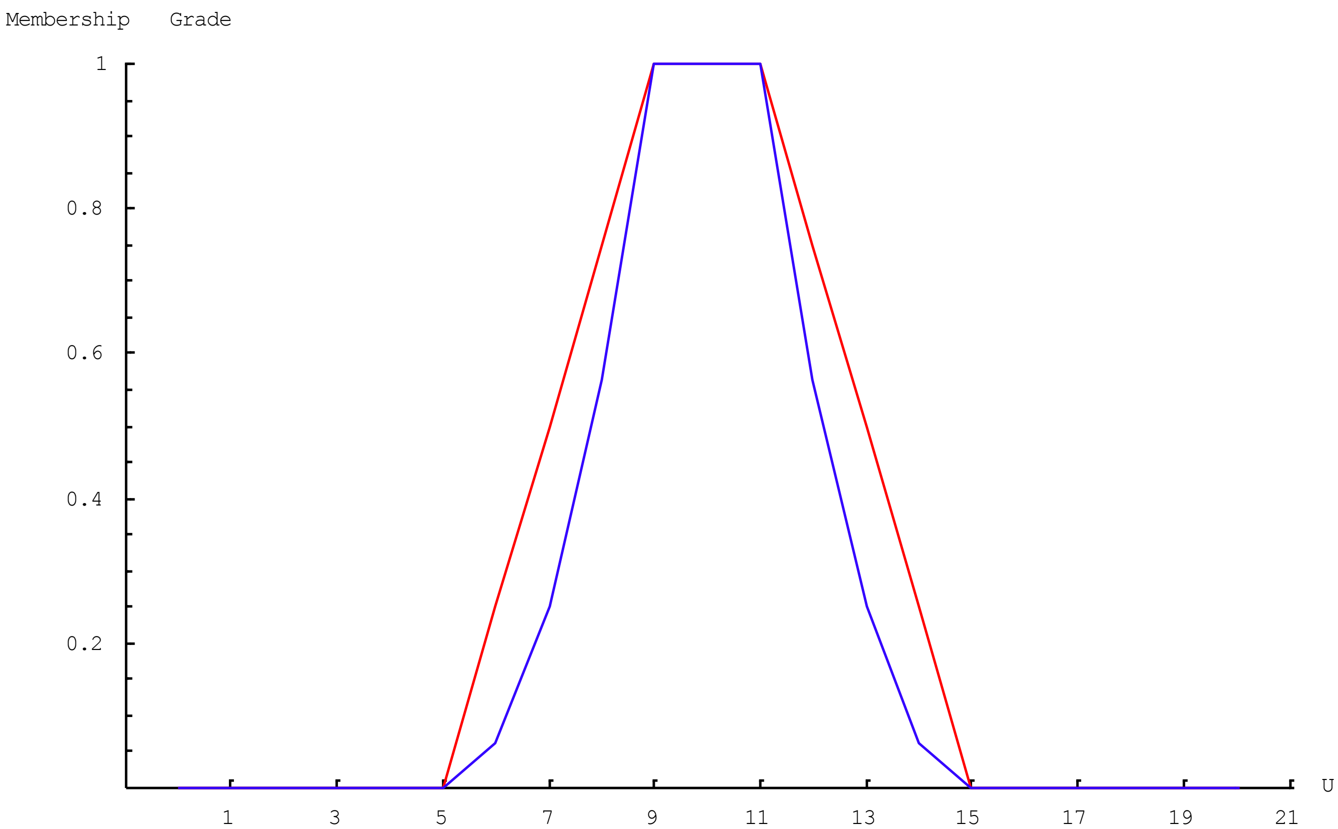
Neizrazita logika = računanje s riječima
(L. Zadeh)

- **Koncentracija** je kvadriranje vrijednosti funkcije pripadnosti - odgovara jezičnom izrazu "*VRLO*“
- Neka je **A** neizraziti skup. Tada je koncentracija od A definirana sa

$$\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(x)^2$$

JEZIČNI MODIFIKATORI

- A = “Prohladno”
- Con(A) = “Vrlo prohladno”



JEZIČNI MODIFIKATORI

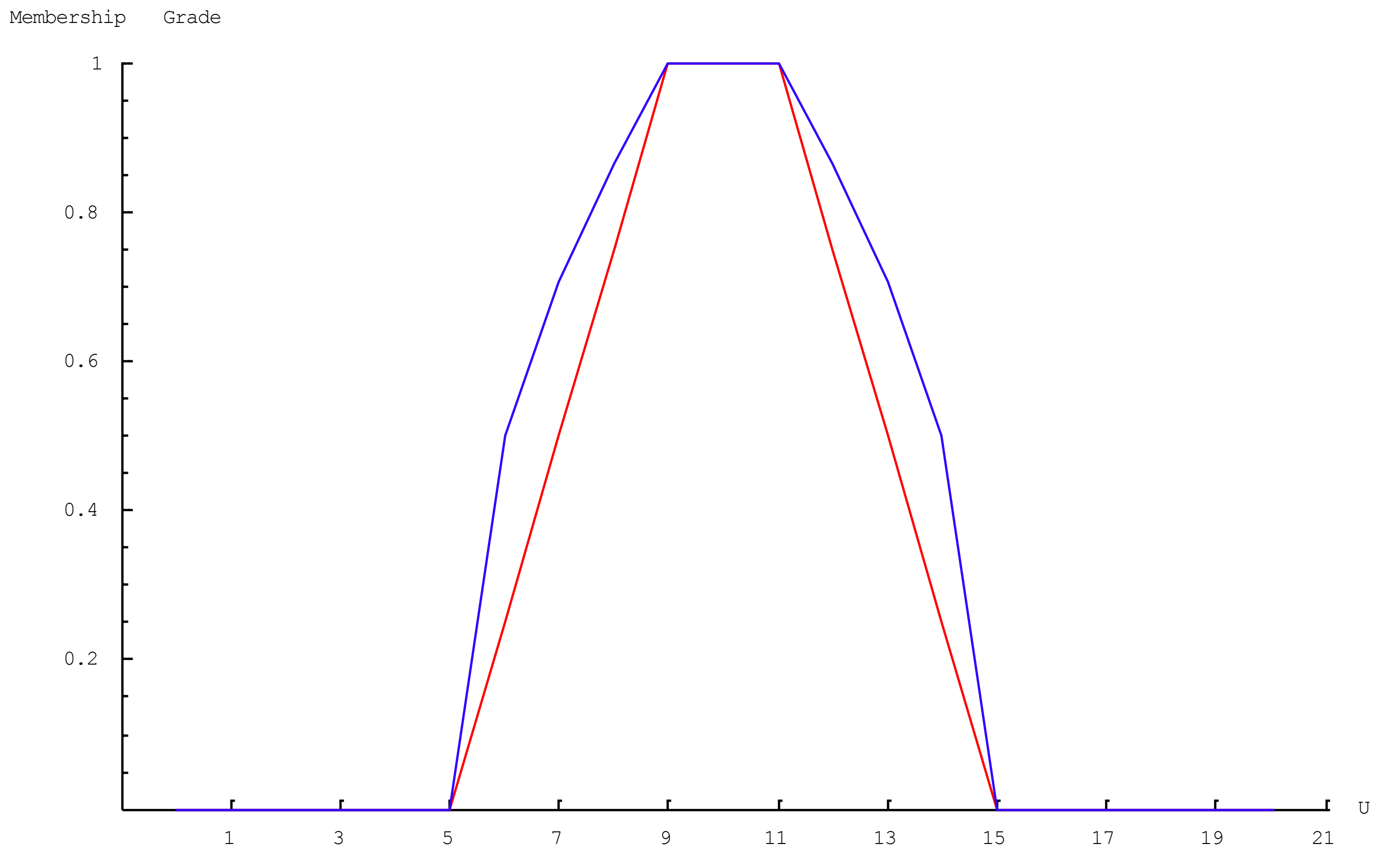
- **Dilatacija** uzima kvadratni korijen vrijednosti funkcije pripadnosti. Odgovara jezičnom izrazu "*MANJE ILI VIŠE*“

- Neka je A neizraziti skup. Tada je dilatacija od **A** definirana sa

$$\mathrm{Dil}(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(x)^{1/2}$$

Primjer

- Dil(A) = “Manje ili više prohladno”



KAKO SU POVEZANI TEORIJA NEIZRAZITIH SKUPOVA I NEIZRAZITA LOGIKA?

- Funkcija pripadnosti neizrazitog skupa i vrijednost istinitosti neke propozicije povezani su na sljedeći način:

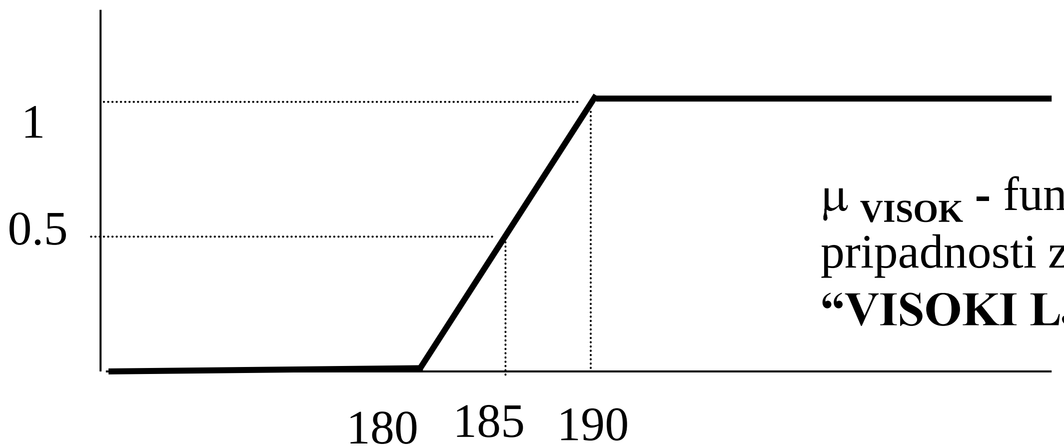
- Istinitost propozicije "*Element x pripada skupu A*" ekvivalentna je stupnju pripadnosti elementa x neizrazitom skupu A tj. $\mu_{\mathbf{A}}(x)$; i obrnuto:

- Stupanj pripadnosti elementa x neizrazitom skupu A ekvivalentan je istinitosti propozicije "*Element x pripada skupu A*"

KAKO SU POVEZANI TEORIJA NEIZRAZITIH SKUPOVA I NEIZRAZITA LOGIKA?

Primjer

- Neka Ivica ima 185 cm
- Neka je netko izjavio " Ivica je visok"
- Koja je mjera istinitosti te propozicije?
- Neka je skup visokih ljudi definiran sa $\mu_{\mathbf{VISOK}}(x)$



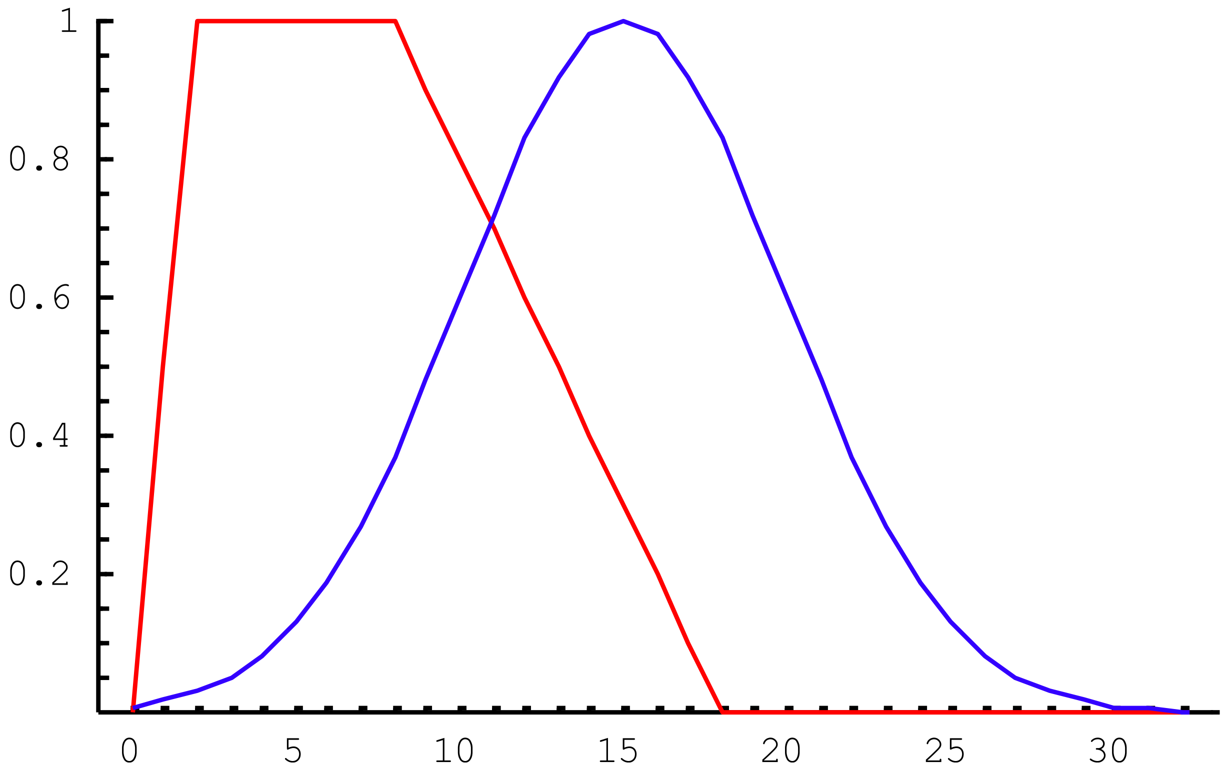
μ_{VISOK} - funkcija pripadnosti za koncept **"VISOKI LJUDI"**

KAKO SU POVEZANI TEORIJA NEIZRAZITIH SKUPOVA I NEIZRAZITA LOGIKA?

- Tada je:
- Istinitost propozicije “Ivica je visok” ekvivalentna je stupnju pripadnosti 185 cm skupu visokih ljudi
- $\mu_{\textbf{VISOKI LJUDI}}(185) = 0.5$

OPERACIJE NAD NEIZRAZITIM SKUPOVIMA

- Neka su **A** i **B** neizraziti skupovi

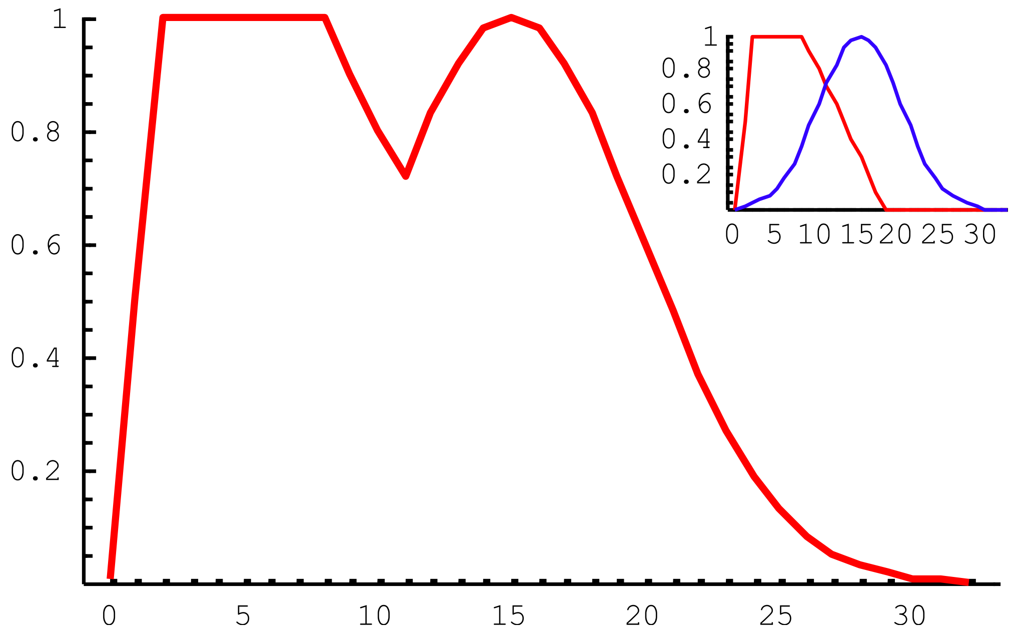


OPERACIJE NAD NEIZRAZITIM SKUPOVIMA

- Unija **A** i **B** jest neizraziti skup **A** $\cup$ **B**,

$$\forall x \in X,\ \mu_{A \cup B}(x) = \max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$$

- Unija oblikuje jezični izraz ***ili***

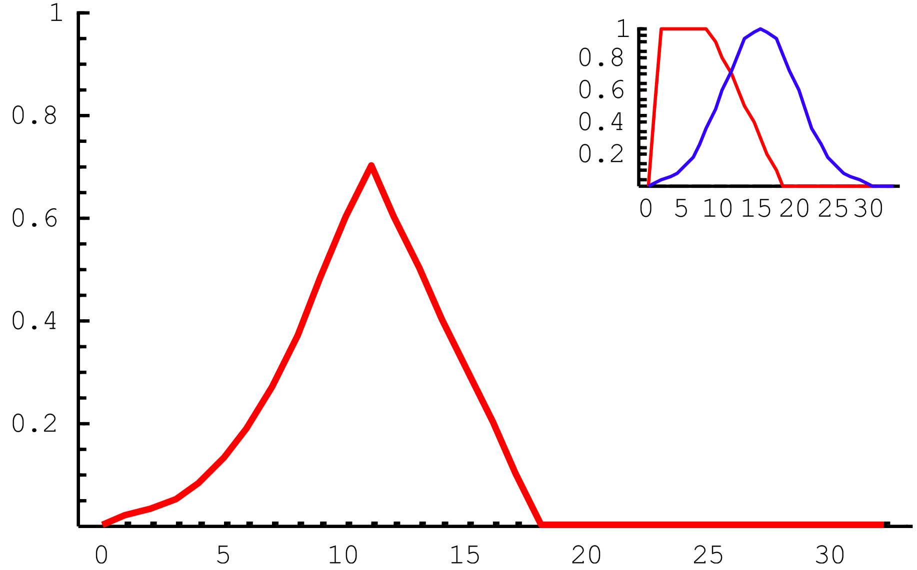


OPERACIJE NAD NEIZRAZITIM SKUPOVIMA

- Presjek **A** i **B** jest neizraziti skup **A** ∩ **B** Presjek oblikuje jezični izraz ***i***

$$\forall x \in X,\ \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

- Presjek oblikuje jezični izraz ***i***



OPERACIJE NAD NEIZRAZITIM SKUPOVIMA

- Komplement od **A** je definiran s a

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X},\ \mu\, A^c\mathbf{(x) = 1-}\ \mu_A\mathbf{(x)}$$

Koji zakoni klasične teorije skupova **ne vrijede** u neizrazitoj logici?

- De Morganovi zakoni?
- Komutativnost?
- Distributivnost?
- Zakon isključenja trećeg?
- Zakon kontradikcije?
- ...

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- U klasičnoj logici možemo izvoditi nove formule (tvrdnje) uporabom valjanih pravila zaključivanja kao što je modus ponens
- Neizrazita logika: **GENERALIZIRANI MODUS PONENS**
- Neka su A, A1, B, B1 neizraziti skupovi

Premisa	x je **A1**
Implikacija	Ako x je **A** onda y je **B**
Zaključak	y je **B1**

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- Uoči bitne razlike od klasičnog modus ponensa:

1. Dozvoljena je uporaba nejasnih, nepreciznih izraza koji se definiraju neizrazitim skupovima (**A, A1, B, B1**)
2. Neizraziti skupovi **A** i **A1** te **B** i **B1,** tj. izrazi koje oni predstavljaju ne moraju biti ISTI!
3. A i A1 kao i B i B1 definirani su na istom univerzalnom skupu!

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

Primjer

Premisa	Ivan je **visok** čovjek**.**
Implikacija	Ako je čovjek **visok** onda je i **težak.**
Zaključak	Ivan je **manje više težak.**

Premisa	Banana je **vrlo žuta.**
Implikacija	Ako je banana **žuta** onda je banana **zrela.**
Zaključak	Banana je **vrlo zrela.**

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- Da bi razumjeli generalizirani modus ponens potrebno je uvesti pojam **neizrazite relacije**
- **Neizraziti skup A –** definiran je funkcijom pripadnosti $\mu_A(x) : X \to [0,1]$, gdje je X univerzalni skup, a $\mu_A(x)$ broj između 0 i 1 koji određuje u kojoj mjeri element x pripada neizrazitom skupu **A**
- **Neizrazita relacija R –** definirana je funkcijom μ_R: X x Y $\to$ [0, 1], gdje $\mu_R(x, y)$ određuje u kojoj su mjeri u relaciji elementi x i y iz univerzalnih skupova X i Y

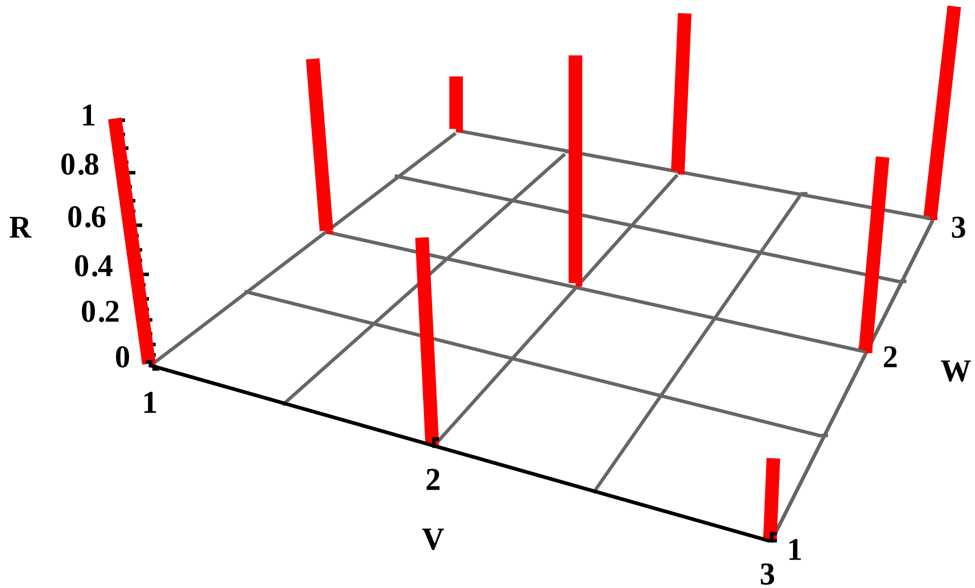
Primjer

- Neizrazita relacija **"približno jednako"** definirana na univerzalnom skupu V, W ={1,2,3}
- R={ ((1, 1), 1), ((1, 2), .8), ((1, 3), .3), ((2, 1), .8), ((2, 2), 1), ((2, 3), .8), ((3, 1), .3), ((3, 2), .8), ((3, 3), 1) }
- U matričnom obliku:

		W		
		1	2	3
	1	1	0.8	0.3
V	2	0.8	1	0.8
	3	0.3	0.8	1

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- Interpretacija: 1 je "približno jednako" 3 sa vrijednošću 0.3, dok je 2 "približno jednako" 2 s vrijednošću 1



Napomena

- Klasična relacija "približno jednako" imala bi na dijagonali jedinice, a sve ostalo bi bile nule

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- Ako je **A** neizraziti skup na X, a **B** neizraziti skup na Y, tada je **A** x **B** **neizrazita relacija** na univerzalnom skupu X x Y definirana sa $\mu_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}: X \times Y \rightarrow [0, 1]$,

$$\mu_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}(x, y) = \min(\mu_{\mathbf{R}}(x), \mu_{\mathbf{R}}(y))$$

Svaka implikacija predstavlja neku neizrazitu relaciju. Implikacija *"Ako x je **A** onda y je **B**"* određuje **neizrazitu relaciju A x B** na X x Y.

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

Primjer

- Implikacija “Ako je Ivan visok onda je Ivan težak” definira neizrazitu relaciju “VISOK x TEŽAK” na sljedeći način:

- Neka je dan skup “visoki” ljudi i neka je dan skup “teški” ljudi. Tada je neizrazita relacija “visoki i teški” ljudi prema gornjoj definiciji definirana sljedećom tablicom:

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

			“teški ljudi” (u kg)								
			0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1
			60	65	70	75	80	85	90	95	100
“visoki ljudi” (u cm)	0	170	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.3	175	0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
	0.5	180	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	0.8	185	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.8	0.8
	1	190	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1
	1	195	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1
	1	200	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1

Na primjer: $\mu_{\text{VISOK x TEŽAK}}(175, 90) = \min\{0.3, 0.9\} = 0.3$

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- Primjer **zaključivanja modus ponensom**

Premisa	v je **malen** broj
Implikacija	v i w su **približno jednaki**
Zaključak	w je **manje više mali**

kako se izvodi zaključak ?

- Univerzalni skupovi V, W ={1, 2, 3}
- Definiramo neizraziti skup **A** = ”**malen broj**” iz premise

$\mu_{\textbf{mali broj}} = 1/1 + 0.5/2 + 0.1/3$

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- Definiramo relaciju "**približno jednaki**" brojevi iz implikacije

$$R_{\text{"približno jednaki"}} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0.8 & 0.3 \\ 2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 3 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{array}$$

- Pravilo zaključivanja za generalizirani modus ponens (tzv. **Zadehovo pravilo min-max kompozicije**) kaže da je tada kompozicija **A o R jednaka neizrazitom skupu B** iz zaključka modus ponensa, gdje je neizraziti skup **B** definiran sa funkcijom pripadnosti
- $\mu_B(w) = \max(\min(\mu_A(v), \mu_R(v,w)))$

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

A "malen broj"

1	2	3
1	0.5	0.1

R ="približno jednaki brojevi"

	1	2	3	
	1	0.8	0.3	1
o	0.8	1	0.8	2
	0.3	0.8	1	3

=**B**

μ_B**(1)** = max(min(μ_A(v), μ_R(v,1)))=

max{ min(1,1), min(0.5,0.8), min(0.1,0.3)} =

max{1, 0.5, 0.1} = **1**

μ_B**(2)** = max(min(μ_A(v), μ_R(v,2)))=

max{ min(1,0.8), min(0.5, 1), min(0.1,0.8)} =

max{0.8, 0.5, 0.1} = **0.8**

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

μ_B**(3)** = max(min(μ_A(v), μ_R(v,32)))=

max{ min(1,0.3), min(0.5, 0.8), min(0.1,1} =

max{0.3, 0.5, 0.1} = **0.5**

- Dakle, rezultat kompozicije tj. zaključivanja je neizraziti skup

B = A o R = 1/1 + 0.8/2 + 0.5/3

- Takvom neizrazitom skupu možemo pridjeliti neki jezični izraz. Na primjer, to može biti jezični izraz ”**manje više mali**” broj. Dakle,

Zaključak	w je **manje više malen.**

- Pridjeljivanje jezičnih izraza neizrazitim skupovima naziva se **jezična aproksimacija**

ZAKLJUČIVANJE U NEIZRAZITOJ LOGICI

- Ukratko: