Logika prvog reda

Poglavlje 8

Prema slajdovima Stuarta Russella (hvala)!

Pregled/Sažetak

◊ Zašto logika prvog reda = logika (ili račun) predikata (LP)?
(engl. First-order logic, skraćeno = FOL)

◊ Sintaksa i semantika FOL

◊ Zabava s rečenicama

◊ Svijet Wumpusa u FOL

Logika sudova: za (i protiv)

😊 Logika sudova (LS) je **deklarativna**:
komadi sintakse odgovaraju činjenicama (svojstva domene)
zaključivanje je neovisno od znanja (ne ovisi o domeni)

😊 LS dozvoljava parcijalne/disjunktivne/negirane informacije
(za razliku od većine struktura i baza podataka)

😊 LS je **kompozicijska** — dozvoljava "slaganja":
značenje od $B_{1,1} \wedge P_{1,2}$ se izvodi iz značenja od $B_{1,1}$ i od $P_{1,2}$

😊 Značenje u LS je **kontekstno–neovisno**
(za razliku od prirodnog jezika, gdje značenje ovisi o kontekstu)

Logika sudova: protiv

☹ LS ima vrlo ograničenu moć izražavanja
(za razliku od prirodnog jezika)

Na primjer, ne možemo reći
"rupe izazivaju vjetar u susjednim poljima"

osim tako da
pišemo po jednu rečenicu za svako polje!
$B_{1,1} \;\Leftrightarrow\; (P_{1,2} \vee P_{2,1})$, ...

$\Longrightarrow$ puno rečenica za jednostavnu stvar
(koja se izgubi u toj masi rečenica)

Logika prvog reda — ključne razlike

Dok logika sudova pretpostavlja da svijet sadrži **činjenice**,
logika prvog reda (kao i prirodni jezik) pretpostavlja da svijet sadrži

- Objekte (odgovaraju imenicama):
  ljude, kuće, brojeve, teorije, boje, ratove, stoljeća, ...
- Relacije (odgovaraju glagolima):
  relacije mogu biti unarne = svojstva, poput:
  crven, okrugli, prost, višekatni, ...,
  ili vezati puno argumenata (n-arna relacija):
  brat od, veći od, unutar, dio od, ima boju, događa se nakon, posjeduje, dolazi između, ...
- Funkcije (posebne relacije, jedna vrijednost za argumente):
  otac od, najbolji prijatelj od, jedan više od, kraj od, ...

Dodatno: može izreći činjenice o nekim ili svim objektima u svemiru.

Logike — općenito

Ontološko određenje = priroda stvarnosti (što postoji i koji su mogući odnosi = opseg modela obzirom na koje se definira istinitost rečenica)

Epistemološko određenje = moguća stanja znanja obzirom na svaku činjenicu (= što agent zna o činjenicama)

Jezik (logika)	Ontološko određenje	Epistemološko određenje
Logika sudova	činjenice	istina/laž/nepoznato
Logika prvog reda	činjenice, objekti, relacije	istina/laž/nepoznato
Vremenska logika (temporal logic)	činjenice, objekti, relacije, vrijeme	istina/laž/nepoznato
Teorija vjerojatnosti	činjenice	stupanj uvjerenja
Neodređena logika (fuzzy logic)	činjenice + stupanj istinitosti	poznat interval vrijednosti

Sintaksa FOL: osnovni elementi — simboli

Tri vrste simbola za "konkretne" stvari u modelu:

Konstante — za objekte (elementi domene u modelu)

$John, \ Richard, \ 2, \ UCB, \ \ldots$

Predikati — za relacije među objektima (istina/laž u modelu)

$King, \ Brother, \ Brat, \ > \ (veće), \ \ldots$

Funkcije — za funkcije na objektima (pridružuju neki objekt)

$Majka, \ Sqrt, \ Length, \ LeftLeg, \ Zbroj\_od, \ \ldots$

Svaki predikat i funkcija imaju propisan (fiksan) broj argumenata

tzv. arnost — binarnost, ternarnost, n-arnost, . . .

(engl. naziv je arity — binarity, ternarity, n-arity, . . .)

Sintaksa FOL: osnovni elementi — varijable i ostalo

Varijable — simboli umjesto kojih možemo uvrstiti bilo koji objekt

$x, \; y, \; a, \; b, \; \ldots$

Napomena: ove četiri vrste simbola moraju biti disjunktni skupovi!

Veznici (konektivi) — kao i u logici sudova

$\land \quad \lor \quad \neg \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

Jednakost — "provjera" jednakosti dva objekta

$=$

Kvantifikatori — vezivanje varijable na sve objekte ili na neki objekt

$\forall \quad \exists$

Atomarne rečenice (formule)

Sasvim općenito, rečenica je atomarna ili složena.

Atomarna rečenica je

$predikat$ ili $predikat(term_1, \ldots, term_n)$ ili $term_1 = term_2$

Term (izraz) je

$konstanta$ ili $varijabla$ ili $funkcija(term_1, \ldots, term_n)$

Term je logički izraz koji se odnosi na objekt.

Primjer terma — preko funkcije, vrijednost je objekt:
$LeftLeg(John)$

Primjeri atomarnih rečenica:
$Brother(John, Richard)$
$> (Length(LeftLeg(Richard)), Length(LeftLeg(John)))$

Složene rečenice (formule)

Složene rečenice grade se od drugih rečenica korištenjem veznika ...

$$\neg S, \quad S_1 \wedge S_2, \quad S_1 \vee S_2, \quad S_1 \;\Rightarrow\; S_2, \quad S_1 \;\Leftrightarrow\; S_2$$

Na primjer:

$$>(1,2) \vee \leq(1,2) \qquad >(1,2) \wedge \neg{>}(1,2)$$

$$\neg Brother(LeftLeg(Richard), John)$$

$$Sibling(KingJohn, Richard) \;\Rightarrow\; Sibling(Richard, KingJohn)$$

Napomena: $Sibling$ = braća/sestre = djeca istih roditelja.

... ili korištenjem kvantifikatora, po pravilu

$$kvantifikator \;\; varijable \;\; S$$

Na primjer:

$$\forall\, x \quad King(x) \;\Rightarrow\; Person(x)$$

$$\exists\, x \quad Crown(x) \wedge OnHead(x, John)$$

Istinitost u logici prvog reda

Rečenice (formule) su istinite obzirom na model i interpretaciju.

Model sadrži ≥ 1 objekata (elemenata domene) i relacije među njima.

Interpretacija određuje (zadaje) "referentne" stvari za:

konstantni simboli $\rightarrow$ objekti
predikatni simboli $\rightarrow$ relacije (predikati)
funkcijski simboli $\rightarrow$ funkcijske relacije (funkcije),

tj. koji simboli se odnose na koje "konkretne" stvari.

Atomarna rečenica

$$predikat(term_1, \ldots, term_n)$$

je istinita ako i samo ako
su objekti na koje se odnose (referencirani s) $term_1, \ldots, term_n$
u relaciji na koju se odnosi $predikat$.

Istinitost u logici prvog reda

Ostatak semantike (istinitosti) je sličan kao u logici sudova,

za veznike postupamo na isti način,

s "očitim" proširenjem na kvantifikatore i jednakost.

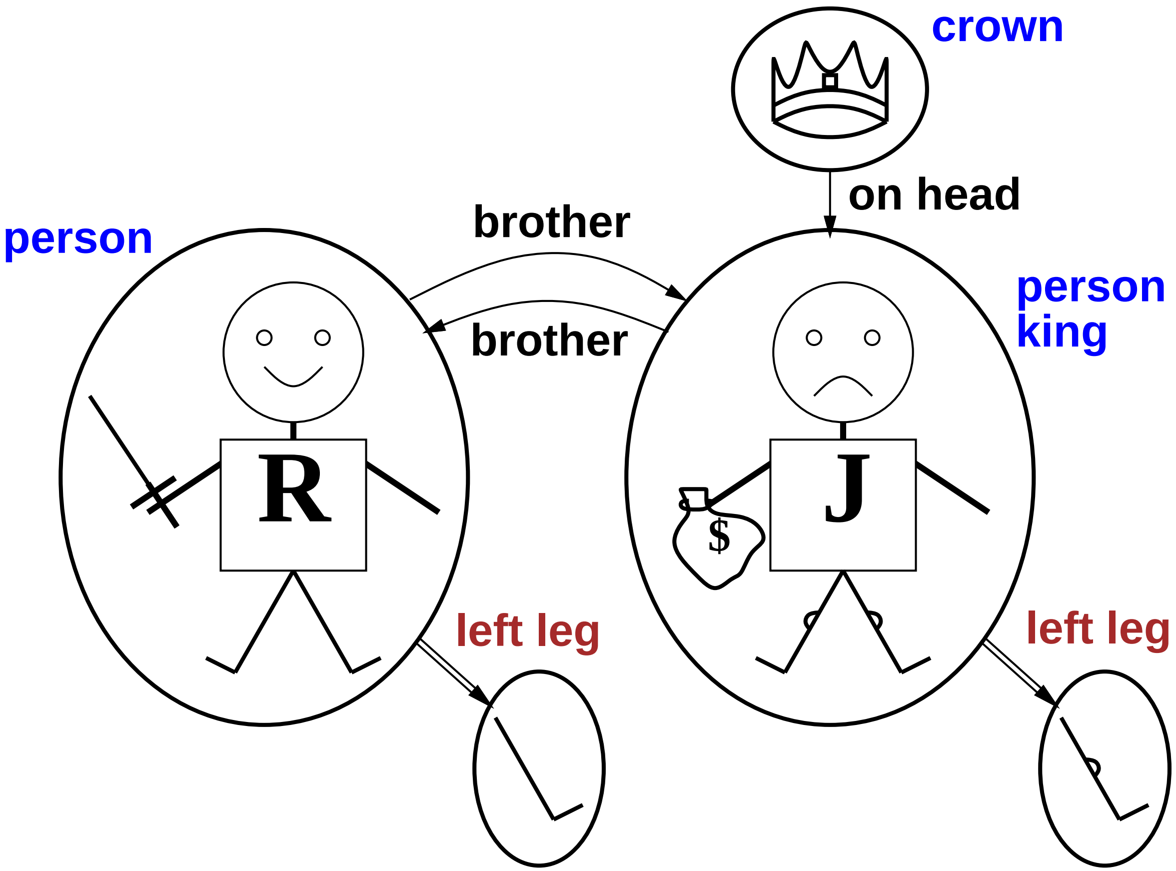
(o tome malo više u nastavku)

Definicije logičke posljedice, valjanosti, itd. — kao prije, tj.

definiraju se u terminima **svih mogući modela**.

Za razliku od LS, ovdje je broj mogućih modela **beskonačan**!

Modeli za logiku prvog reda — primjer



Model ima

5 objekata (zaokruženi), 2 binarne relacije (*brother*, *on head*), 3 unarne relacije (*person*, *king*, *crown*) i jednu unarnu funkciju (*left leg*)

Primjer istinitosti

Promotrimo interpretaciju u kojoj je

$Richard \rightarrow$ Richard the Lionheart (Richard Lavljeg Srca)
$John \rightarrow$ zli King John (Kralj John)
$Brother \rightarrow$ relacija biti braća

Uz takvu interpretaciju,

$Brother(Richard, John)$ je istina,

samo u modelu u kojem su

Richard the Lionheart i zli King John u relaciji biti braća.

Takav model odgovara stvarnosti (povijesti).

Mnogo modela za FOL!

Relacija logičke posljedice u propozicijskoj logici (LS) može se izračunati enumeracijom (prebrojavanjem) svih modela.

U FOL (LP) to **ne ide**, jer već

broj objekata u modelu može ići od 1 do beskonačno.

A onda još dolazi broj pridruživanja konstantnih simbola objektima ...

Možemo enumerirati FOL modele za dani rječnik iz baze znanja KB:

Za svaki broj elemenata domene n od 1 do ∞
- Za svaki k-narni predikat P_k u rječniku
  - Za svaku moguću k-narnu relaciju na n objekata
    - Za svaki konstantni simbol C u rječniku
      - Za svaki izbor referenta od C među n objekata ...

Računanje logičke posljedice enumeracijom FOL modela nije dopustivo!

Univerzalna kvantifikacija — istinitost

Oblik: $\forall\ \langle varijable \rangle\ \langle re\check{c}enica \rangle$

Primjer: Svatko na sveučilištu Berkeley je pametan:

$$\forall x\ \ At(x, Berkeley)\ \Rightarrow\ Smart(x)$$

Neka je P bilo koji logički izraz.

Rečenica $\forall x\ \ P$ je istinita u modelu m ako i samo ako je
P istinita za **svaki** mogući izbor objekta x u modelu

Preciznije, u **svim** proširenim interpretacijama od m, koje nastaju tako da se x odnosi na neki konkretni (zadani) element domene.

Univerzalna kvantifikacija i česta greška

Ugrubo govoreći, $\forall x \;\; P$ je ekvivalentna konjunkciji svih instanci od P

$$
\begin{aligned}
& (At(John, Berkeley) \;\Rightarrow\; Smart(John)) \\
\land\; & (At(Richard, Berkeley) \;\Rightarrow\; Smart(Richard)) \\
\land\; & (At(Berkeley, Berkeley) \;\Rightarrow\; Smart(Berkeley)) \\
\land\; & \ldots
\end{aligned}
$$

Tipično je $\;\Rightarrow\;$ glavna poveznica sa $\forall$

Česta greška: upotreba $\land$ kao glavne poveznice sa $\forall$. Na pr.

$$\forall x \;\; At(x, Berkeley) \land Smart(x)$$

znači "Svatko je na sveučilištu Berkeley i svatko je pametan".

Egzistencijska kvantifikacija — istinitost

Oblik: $\exists \ \langle varijable \rangle \ \langle rečenica \rangle$

Primjer: Netko na sveučilištu Stanford je pametan:

$$\exists\, x \ \ At(x, Stanford) \wedge Smart(x)$$

Neka je P bilo koji logički izraz.

Rečenica $\exists\, x \ \ P$ je istinita u modelu m ako i samo ako je
P istinita za **neki** mogući izbor objekta x u modelu

Preciznije, u **bar jednoj** proširenoj interpretaciji od m, koja x-u dodjeljuje neki konkretni element domene.

Egzistencijska kvantifikacija i česta greška

Ugrubo govoreći, $\exists x\ \ P$ je ekvivalentna disjunkciji svih instanci od P

$$
\begin{aligned}
& (At(John, Stanford) \land Smart(John)) \\
\lor\ & (At(Richard, Stanford) \land Smart(Richard)) \\
\lor\ & (At(Stanford, Stanford) \land Smart(Stanford)) \\
\lor\ & \ldots
\end{aligned}
$$

Tipično je $\land$ glavna poveznica s $\exists$

Česta greška: upotreba $\Rightarrow$ kao glavne poveznice s $\exists$. Na pr.

$$\exists x\ \ At(x, Stanford)\ \Rightarrow\ Smart(x)$$

je istina i ako postoji netko tko nije na sveučilištu Stanford (a ne samo ako postoji netko pametan)!

(Iz lažne premise slijedi bilo što, pa i istina)

Svojstva kvantifikatora

Višestruki kvantifikatori i zamjena poretka:

$\forall x \ \forall y$ je isto što i $\forall y \ \forall x$ (zašto??) zapis $\forall x, y$

$\exists x \ \exists y$ je isto što i $\exists y \ \exists x$ (zašto??) zapis $\exists x, y$

Međutim,

$\exists x \ \forall y$ nije isto kao $\forall y \ \exists x$

Na primjer:

$\exists x \ \forall y \ \ Loves(x, y)$

"Postoji osoba koja voli svakoga na svijetu"

$\forall y \ \exists x \ \ Loves(x, y)$

"Svatko na svijetu je voljen od barem jedne osobe"

Analiza: Konvergencija i uniformna konvergencija niza funkcija,
ili neprekidnost i uniformna neprekidnost funkcije ...

Svojstva kvantifikatora — dualnost (De Morgan)

Dualnost kvantifikatora: svaki se može izraziti uz pomoć drugoga

$$\forall x \;\; Likes(x, IceCream) \qquad \neg\exists x \;\; \neg Likes(x, IceCream)$$

$$\exists x \;\; Likes(x, Broccoli) \qquad \neg\forall x \;\; \neg Likes(x, Broccoli)$$

$$\forall x \;\; \neg Likes(x, IceCream) \qquad \neg\exists x \;\; Likes(x, IceCream)$$

$$\exists x \;\; \neg Likes(x, Broccoli) \qquad \neg\forall x \;\; Likes(x, Broccoli)$$

Ovo odgovara De Morganovim zakonima u LS.

Kvantifikator "veže" varijablu u svom dosegu (koristiti zagrade).
Vezane i slobodne varijable:

$$\forall x \;\; (R(y, z) \wedge \exists y \;\; (\neg P(y, x) \vee R(y, z)))$$

Zabava s rečenicama

Braća su djeca istih roditelja (engl. siblings)

Zabava s rečenicama

Braća su djeca istih roditelja (engl. siblings)

$$\forall\, x, y \;\; Brother(x, y) \;\Rightarrow\; Sibling(x, y).$$

"Biti dijete istih roditelja" je simetrična

Zabava s rečenicama

Braća su djeca istih roditelja (engl. siblings)

$$\forall\, x, y \;\; Brother(x, y) \;\Rightarrow\; Sibling(x, y).$$

"Biti dijete istih roditelja" je simetrična

$$\forall\, x, y \;\; Sibling(x, y) \;\Leftrightarrow\; Sibling(y, x).$$

Nečija majka je nečiji ženski roditelj

Zabava s rečenicama

Braća su djeca istih roditelja (engl. siblings)

$$\forall\, x, y \;\; Brother(x, y) \;\Rightarrow\; Sibling(x, y).$$

"Biti dijete istih roditelja" je simetrična

$$\forall\, x, y \;\; Sibling(x, y) \;\Leftrightarrow\; Sibling(y, x).$$

Nečija majka je nečiji ženski roditelj

$$\forall\, x, y \;\; Mother(x, y) \;\Leftrightarrow\; (Female(x) \land Parent(x, y)).$$

Bratić (najbliži rođak) je dijete roditeljevog brata/sestre

Zabava s rečenicama

Braća su djeca istih roditelja (engl. siblings)

$$\forall\, x,y\;\; Brother(x,y) \;\Rightarrow\; Sibling(x,y).$$

"Biti dijete istih roditelja" je simetrična

$$\forall\, x,y\;\; Sibling(x,y) \;\Leftrightarrow\; Sibling(y,x).$$

Nečija majka je nečiji ženski roditelj

$$\forall\, x,y\;\; Mother(x,y) \;\Leftrightarrow\; (Female(x) \land Parent(x,y)).$$

Bratić (najbliži rođak) je dijete roditeljevog brata/sestre

$$\forall\, x,y\;\; FirstCousin(x,y) \;\Leftrightarrow\; \exists\, p,ps\;\; Parent(p,x) \land Sibling(ps,p) \land Parent(ps,y)$$

Jednakost — istinitost

Oblik: $term_1 = term_2$

Primjer: Henry je otac od Johna (ili Johnov otac)

$Father(John) = Henry$

Rečenica $term_1 = term_2$ je istinita u modelu m ako i samo ako se $term_1$ i $term_2$ odnose na isti objekt

Na pr., $1 = 2$ i $\forall\, x \;\; x = y$ su ispunjive rečenice, a $2 = 2$ je valjana

Potpuna definicija $Sibling$ u terminima $Parent$:

$$\forall\, x, y \;\; Sibling(x, y) \;\Leftrightarrow\; [\neg(x = y) \land \exists\, m, f \;\; \neg(m = f) \land Parent(m, x) \land Parent(f, x) \land Parent(m, y) \land Parent(f, y)]$$

Jednakost/različitost (katkad pišemo $\neq$) je bitna za točan opis.

Promjena sematike — za lakše razumijevanje u KB

Problem: U FOL, rečenice $1 = 2$ i $John = Richard$ su ispunjive
— u nekim modelima, razni simboli mogu se odnositi na isti objekt.

To je vrlo neugodno za praktičnu primjenu u sustavima zaključivanja na bazi znanja
— navikli smo da razni simboli znače razne stvari (kao u govornom jeziku), osim ako ih eksplicitno ne izjednačimo.

Tzv. semantika baza podataka, koristi se i u logičkom programiranju:
- jedinstvena imena — razni konstantni simboli znače razne stvari
- zatvorenost svijeta — atomske rečenice, za koje ne znamo jesu li istinite, su lažne
- zatvarač domene — svaki model ima samo elemente imenovane konstantnim simbolima (tj. nema više elemenata)

Interakcija s FOL bazama znanja

Imamo dva oblika "komunikacije" s bazom znanja (KB).

Funkcija $\textsc{Tell}$ dodaje rečenice u bazu (kao prije u LS). Takve rečenice zovemo izjave ili tvrdnje. Na pr.

$$\textsc{Tell}(KB, King(John))$$
$$\textsc{Tell}(KB, Person(Richard))$$
$$\textsc{Tell}(KB, \forall\, x \;\; King(x) \;\Rightarrow\; Person(x)))$$

Svaku od ovih tvrdnji možemo gledati kao aksiom domene. Tvrdnje mogu biti i definicije (zadaju se putem $\forall$ i $\Leftrightarrow$), na pr.

$$\forall\, x, y \;\; Mother(x, y) \;\Leftrightarrow\; (Female(x) \wedge Parent(x, y)).$$

Nisu sve rečenice aksiomi. Neke su teoremi — tj. mogu se izvesti kao posljedice aksioma (i definicija). Na pr.

$$\forall\, x, y \;\; Sibling(x, y) \;\Leftrightarrow\; Sibling(y, x).$$

Interakcija s FOL bazama znanja

Funkcijom ASK postavljamo pitanja o znanju u bazi. Takva pitanja zovemo upiti ili ciljevi. Na pr., upit

$$\text{ASK}(KB, King(John))$$

vraća $true$ (istina).

Možemo postavljati i kvantificirane upite, poput

$$\text{ASK}(KB, \exists x \;\; Person(x))$$

On, također, vraća $true$, ali nam to ne kaže baš puno.

Puno više nas zanima za koje vrijednosti x je ta rečenica istinita. Za to koristimo funkciju ASKVARS. Poziv oblika

$$\text{ASKVARS}(KB, Person(x))$$

u principu daje čitav niz odgovora.

Interakcija s FOL bazama znanja

U ovom slučaju dobivamo dva odgovora

$$\{x/John\} \quad \text{i} \quad \{x/Richard\}$$

Takav odgovor se zove lista supstitucija ili lista vezivanja.

Funkcija AskVars uglavnom postoji za KB
koje sadrže samo Hornove klauzule.

Razlog: svaki način da upit postane istinit,
nužno vezuje varijable na konkretne vrijednosti.

U FOL bazama znanja to ne mora vrijediti. Ako smo KB rekli

$$King(John) \lor King(Richard)$$

upit $\exists\, x \;\; King(x)$ je istinit, ali ne vezuje varijablu x na neku konkretnu vrijednost (može biti jedno ili drugo).

Primjeri baza znanja za pojedine domene

Primjeri "baza znanja" tj. aksioma za pojedine domene —v. knjiga

porodični odnosi (rodoslovna stabla, krvno srodstvo)

prirodni brojevi (zajedno s nulom) — Peanovi aksiomi

skupovi i elementi

liste — slično skupovima, ali imaju uređaj, na pr. [1, 2]
isti element može biti više puta u listi

Wumpusov svijet — posebne značajke

Okolina je

– statička (do na hvatanje zlata, ubijanje Wumpusa)

– djelomično poznata

znamo samo opća pravila svijeta,
ali ne znamo detaljni raspored stvari po svijetu.

Agent dobiva percepcije i izvodi akcije u vremenu

– baza znanja mora biti vremenski ovisna

– zaključci su, također, vremenski ovisni

Vremenske trenutke označavamo cijelim brojevima, počev od 0.

Pripadna varijabla je t.

Percepcije dodajemo u bazu KB (funkcija TELL),
a najbolje akcije dobivamo upitima (funkcija ASKVARS)

Baza znanja za Wumpusov svijet

v. Russell–Norvig, str. 305–306.