Nesigurnost/neizvjesnost

Poglavlje 13

Prema slajdovima Stuarta Russella (hvala)!

Sadržaj

- ♢ Nesigurnost ili neizvjesnost (engl. uncertainty), nepouzdanost
- ♢ Vjerojatnost
- ♢ Sintaksa i semantika
- ♢ Zaključivanje ili rasuđivanje (engl. inference)
- ♢ Nezavisnost i Bayesovo pravilo

Nesigurnost

Neka je akcija $A_t =$ odlazak na aerodrom t minuta prije leta
Hoće li me A_t dovesti tamo na vrijeme?

Problemi:
1) parcijalno opažanje (stanje puteva, planovi drugih vozača, itd.)
2) senzori sa "šumom" (radio izvještaji o prometu)
3) slučajnosti u ishodu (probušena guma na autu i sl.)
4) ogromna složenost modeliranja i predviđanja prometa

Stoga, čisto logički pristup može dovesti do
– rizika neistinitosti: "A_{90} će me dovesti na vrijeme"
– zaključaka koji su preslabi za odluku:
"A_{90} će me dovesti na vrijeme, ako nema nesreće na mostu
i ako ne pada kiša i moje gume ostanu u dobrom stanju, itd."

Nesigurnost — nastavak

S druge strane, za A_{1440} može se sa razumnom sigurnošću reći da ću stići na vrijeme,
ali, to znači da moram prenoćiti na aerodromu . . .

Dakle, to nije razumna odluka!

U nekom smislu, A_{90} je razumna akcija
prema nekoj "mjeri uspješnosti", kad sve uzmem u obzir,
(moje/agentove preferencije na bazi znanja o okolini)
iako ništa ne garantira dobar ishod.

Metode za postupanje s nesigurnostima

Uobičajena ili nemonotona logika (kvalitativno razmišljanje):

Pretpostavi da moj auto nema praznu gumu

Pretpostavi da A_{90} radi, osim ako ne postoji dokazana kontradikcija

Ideja: Vjerujem, dok ne nađem bolji razlog da vjerujem u nešto drugo.

Problemi:

Koje su pretpostavke razumne? Kako se nositi s kontradikcijom?

Pravila s izmišljenim faktorima (engl. "fudge factors"):

$A_{25} \mapsto_{0.3} NaAerodromuNaVrijeme$

$Prskalica \mapsto_{0.99} MokraTrava$

$MokraTrava \mapsto_{0.7} Kiša$

Problemi:

Kombinacije pravila, na primjer, $Prskalica$ uzrokuje $Kiša$??

Metode za postupanje s nesigurnostima — nastavak

Vjerojatnost

Obzirom na raspoložive dokaze (engl. "evidence"),

A_{25} će me dovesti na vrijeme s vjerojatnošću 0.04

Mahaviracarya (9. st.), Cardano (1565.g.) teorija kockanja

Neizrazita ili neodređena logika (engl. "fuzzy logic")

koristi stupanj istinitosti, a NE nesigurnost (okomiti pojmovi), t.j.,

$MokraTrava$ je istinito sa stupnjem 0.2.

Ima još pristupa:

Bayesove vjerojatnosti (subjektivno vjerovanje agenta)

Teorija preferencija (bazirana na usporedbama)

Dempster–Shafer teorija neznanja (interval za stupanj vjerovanja)

...

(v. RN, poglavlje 14.7)

Nesigurno (nepouzdano) znanje — uzroci

Osnovni uzrok = nepotpuna slika svijeta (okoline)
– pomanjkanje relevantnih činjenica,
– pomanjkanje "logičke" kategoričnosti (istina/laž)

Znanje o okolini nije potpuno iz raznih razloga:
greške: netočnost u percepciji, mjerenjima
lijenost: nabrajanje svih mogućih slučajeva, iznimki, pravila
je nemoguće ili traži previše resursa
neznanje:
nedovoljno (manjkavo) teorijsko poznavanje domene
(medicina, ekonomija, industrija, . . .)
manjak podataka (čak i kad imamo "svo znanje")

Nesigurno (nepouzdano) znanje — odluke, akcije

I dalje treba donositi racionalne (razumne) odluke i akcije.

Podloga za odluke i akcije:

– relativna važnost ciljeva (mjera uspješnosti)
  uključivo i negativni efekt nekih mogućih posljedica
– izglednost (vjerojatnost/očekivanje) ostvarenja tih ciljeva

Prednost teorije vjerojatnosti = bliska veza s logičkim zaključivanjem

– ontološko poimanje svijeta je isto — činjenice
– epistemologija je različita
  umjesto laž/istina + ev. nepoznato (diskretno),
  numerički stupanj uvjerenja — između 0 (laž) i 1 (istina)

Vjerojatnost

Vjerojatnosne tvrdnje daju **zbirni** ili **sažeti** efekt

lijenosti: neuspjeha u nabrajanju iznimki, kvalifikacija, i dr.

neznanja: pomanjkanja relevantnih činjenica, početnih uvjeta i dr.

Subjektivna ili Bayesova vjerojatnost:

vjer. izjava se odnosi na vlastito stanje znanja, a ne na stvarni svijet.

Na primjer, ako ništa dodatno ne znam (na samom početku), onda je

$P(A_{25}) = 0.04$.

Međutim, ako znam da nema izvještaja o nesreći na putu, onda je

$P(A_{25} | \text{nema izvještaja o nesreći}) = 0.06$

To **nisu** tvrdnje o "vjerojatnosnoj tendenciji" u trenutnoj situaciji (ali može se učiti iz stečenog iskustva u sličnim situacijama)

Vjerojatnost — nastavak

Vjerojatnosti tvrdnji mijenjaju se s novim dokazima.

Na primjer, ako još znamo i da je 5 sati ujutro (mali promet), onda je
$P(A_{25}|\text{nema izvještaja o nesreći, 5 ujutro}) = 0.15$

Ovo je analogno statusu logičke posljedice $KB \models \alpha$, a ne istinitosti.

Prethodne izjave nisu međusobno kontradiktorne, već se odnose na drugačija stanja znanja.

Usput, ovi primjeri ilustriraju važnost pojma uvjetne vjerojatnosti.

Odlučivanje uz nesigurnosti

Pretpostavimo da vjerujem u sljedeće:

$$P(A_{25} \text{ će me dovesti na vrijeme}|\ldots) = 0.04$$
$$P(A_{90} \text{ će me dovesti na vrijeme}|\ldots) = 0.70$$
$$P(A_{120} \text{ će me dovesti na vrijeme}|\ldots) = 0.95$$
$$P(A_{1440} \text{ će me dovesti na vrijeme}|\ldots) = 0.9999$$

Koju akciju izabrati?

Ovisi o mojim preferencijama između mogućih ishoda raznih planova: propušteni let, prema spavanju na aerodromu, kuhinji, itd.

Za predstavljanje preferencija i zaključivanje na osnovu njih koristimo teoriju korisnosti (engl. "utility theory")

Svako stanje ima neki stupanj korisnosti (vrijednosti) za danog agenta.

Teorija odlučivanja = teorija korisnosti + teorija vjerojatnosti

Osnove vjerojatnosti — diskretni događaji

Krećemo od skupa Ω — prostor elementarnih događaja/uzoraka (engl. "sample space")

na primjer, 6 mogućih ishoda bacanja kocke.

Element $\omega \in \Omega$ je točka uzorka/mogući svijet/elem. ili atomski događaj.

Prostor vjerojatnosti ili vjerojatnosni model je prostor el. događaja Ω, s dodjeljivanjem vjerojatnosti $P(\omega)$ za svaki $\omega \in \Omega$, tako da je

$$0 \leq P(\omega) \leq 1 \quad \text{i} \quad \sum_{\{\omega \in \Omega\}} P(\omega) = 1.$$

Na primjer, $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$.

Događaj A je bilo koji podskup od Ω, a njegova vjerojatnost je

$$P(A) = \sum_{\{\omega \in A\}} P(\omega).$$

Na primjer,

$$P(\text{pao broj} < 4) = P(1) + P(2) + P(3) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.$$

Slučajne varijable

Slučajna varijabla je funkcija iz prostora Ω u neki skup (kodomenu). Na primjer, u

skup realnih brojeva, ili

logičke vrijednosti $\{false, true\}$ — Booleova slučajna varijabla.

Na primjer, funkcija Odd (neparan), pa je $Odd(1) = true$.

Vjerojatnost P inducira distribuciju vjerojatnosti za bilo koju slučajnu varijablu X:

$$P(X = x_i) = \sum_{\{\omega : X(\omega) = x_i\}} P(\omega).$$

Na primjer,

$$P(Odd = true) = P(1) + P(3) + P(5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2.$$

Propozicije (sudovi) — veza s logikom

Zamislimo propoziciju (izjavu, sud) kao događaj

$=$ skup svih elementarnih događaja gdje je izjava istinita.

Za zadane Booleove slučajne varijable A and B:

događaj $a =$ skup elementarnih događaja gdje je $A(\omega) = true$

događaj $\neg a =$ skup elementarnih događaja gdje je $A(\omega) = false$

događaj $a \wedge b =$ točke gdje je $A(\omega) = true$ i $B(\omega) = true$

U primjenama UI, vrlo često se elementarni događaji **definiraju** kao

vrijednosti nekog skupa slučajnih varijabli,

tj. skup elementarnih događaja je zapravo

Kartezijev produkt kodomena (slika) slučajnih varijabli (a ne Ω).

Veza vjerojatnosti i logike sudova

Kad su slučajne varijable Booleove,
elementarni događaj (točka uzorka) $=$ model za logiku sudova.

Na primjer, $A = true$, $B = false$, ili skraćeno $a \land \neg b$.

Uočiti (može i preko DNF):
Propozicija $=$ disjunkcija elementarnih događaja u kojima je istinita.

Posljedica: pripadne vjerojatnosti se zbrajaju — po definiciji!

Za "slučajne" varijable $True$, $False$ vrijedi $P(true) = 1$, $P(false) = 0$.

Na primjer,

$$(a \lor b) \equiv (\neg a \land b) \lor (a \land \neg b) \lor (a \land b)$$

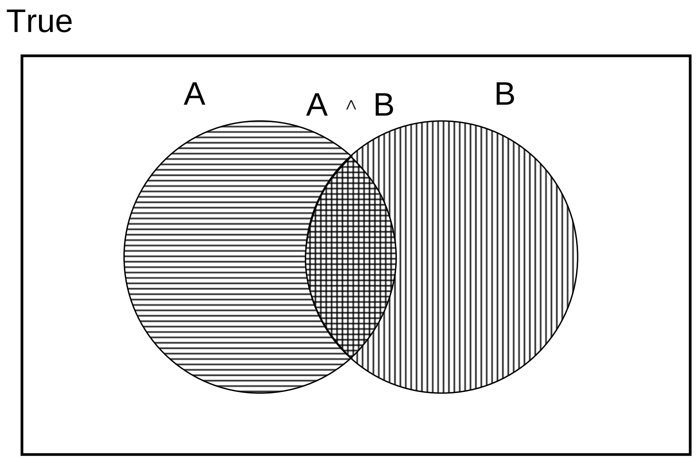
odakle slijedi

$$P(a \lor b) = P(\neg a \land b) + P(a \land \neg b) + P(a \land b)$$

Zašto koristimo vjerojatnost?

Definicije vjerojatnosti povlače da
određeni logički vezani događaji moraju imati vezane vjerojatnosti.

Na primjer, $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$, (Kolmogorov)



Posebno, za $b = \neg a$ dobivamo $P(\neg a) = 1 - P(a)$.

de Finetti (1931): ako se agent kladi prema "vjerojatnostima" koje krše ove aksiome, onda može biti natjeran da se kladi tako da gubi novce, neovisno o ishodu (postoji odgovarajuća kombinacija oklada, v. RN).

Sintaksa (zapis) propozicija — u vjerojatnosti

Slučajne varijable X — oznaka velikim slovom.
Moguće vrijednosti (za diskretne varijable) — oznaka malim slovom.

Propozicijske ili Booleove slučajne varijable
na pr., $Cavity$ (imam li rupu u zubu = engl. cavity?)
$Cavity = true$ je propozicija, kratki zapis je $cavity$.

Diskretne slučajne varijable (konačne ili beskonačne = prebrojive)
na pr., $Weather$ je jedno iz skupa $\{sunny, rain, cloudy, snow\}$
$Weather = rain$ je propozicija, kratki zapis je $rain$.
Vrijednosti moraju biti sveobuhvatne i međusobno različite.

Neprekidne slučajne varijable (ograničene ili neograničene)
na pr., $Temp = 21.6$, a dozvoljeno je i $Temp < 22.0$.

Događaji u UI su propozicije — zadaju se proizvoljnim Booleovim kombinacijama osnovnih propozicija.

Početna (a priori) vjerojatnost

Početna (prethodna) ili bezuvjetna vjerojatnost propozicija
(engl. "prior", "unconditional")
odgovara uvjerenju u nedostatku bilo kakvih dodatnih informacija,
prije saznanja bilo kakvih (novih) "dokaza".

Na pr., $P(Cavity = true) = 0.2$ i $P(Weather = sunny) = 0.72$

Distribucija vjerojatnosti za slučajnu varijablu X, oznaka $\mathbf{P}(X)$, daje vrijednosti vjerojatnosti za sve moguće ishode.

Zapis: poredamo sve moguće elementarne događaje u vektor

$$\langle sunny, rain, cloudy, snow \rangle$$

i distribuciju vjerojatnosti pišemo kao vektor

$$\mathbf{P}(Weather) = \langle 0.72, 0.1, 0.08, 0.1 \rangle$$

(vektor mora biti normaliziran, tj., suma vrijednosti je 1).

Združena (zajednička) distribucija vjerojatnosti

Kad imamo više slučajnih varijabli, združena ili zajednička distribucija vjerojatnosti (engl. "joint probability distribution") daje vjerojatnost na Kartezijevom produktu pripadnih skupova elementarnih događaja.

Oznaka: $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n)$.

Na primjer, $\mathbf{P}(Weather, Cavity) = 4 \times 2$ tablica vrijednosti:

$Weather =$	$sunny$	$rain$	$cloudy$	$snow$
$Cavity = true$	0.144	0.02	0.016	0.02
$Cavity = false$	0.576	0.08	0.064	0.08

Uočiti: $\mathbf{P}(Weather, Cavity) = \mathbf{P}(Weather) \cdot \mathbf{P}(Cavity)$ zbog nezavisnosti pripadnih događaja (v. malo kasnije).

Napomena: produkt $\cdot$ je množenje vektora po točkama, svaki sa svakim. (Kroneckerov, direktni ili tenzorski produkt). Nadalje, ne pišemo "$\cdot$".

Potpuna združena distribucija vjerojatnosti

Potpuna (ili cijela) združena distribucija vjerojatnosti
(engl. “full joint distribution”)
je zajednička distribucija za sve slučajne varijable u problemu.

Potpuna združena distribucija daje odgovor na svako pitanje o domeni
— svaki događaj je “suma” elementarnih događaja.

Zvuči dobro, ali za sve iole veće probleme — tablica je ogromna!

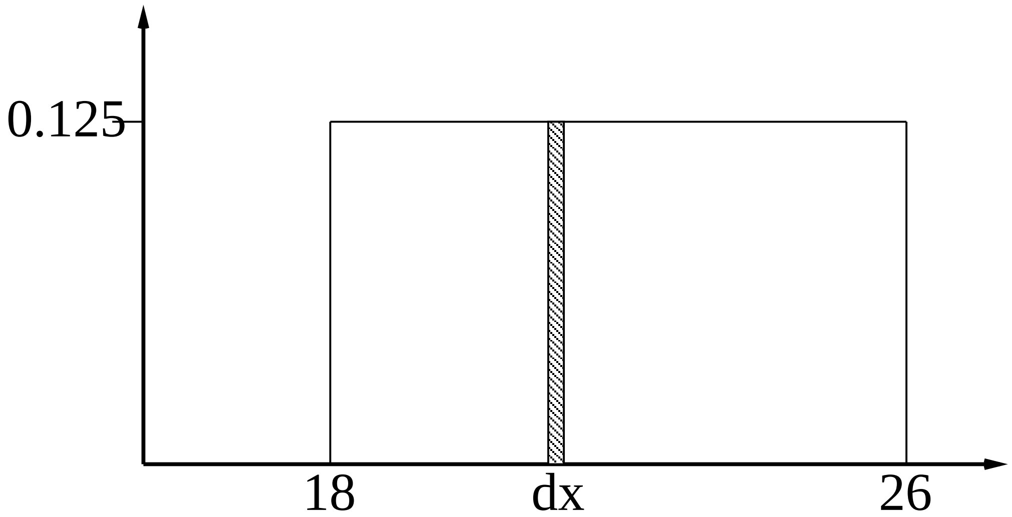
Naime,
veličina tablice = produkt broja mogućih vrijednosti svake varijable,
tj. $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{card}\, X_i(\Omega)$.

Ilustracija malo kasnije.

Vjerojatnost za neprekidne varijable

Izrazimo vjerojatnost kao funkciju vrijednosti slučajne varijable:

$P(X = x) = U[18, 26](x) =$ uniformna gustoća između 18 i 26



Ovdje je P funkcija gustoće vjerojatnosti — njezin integral je 1.

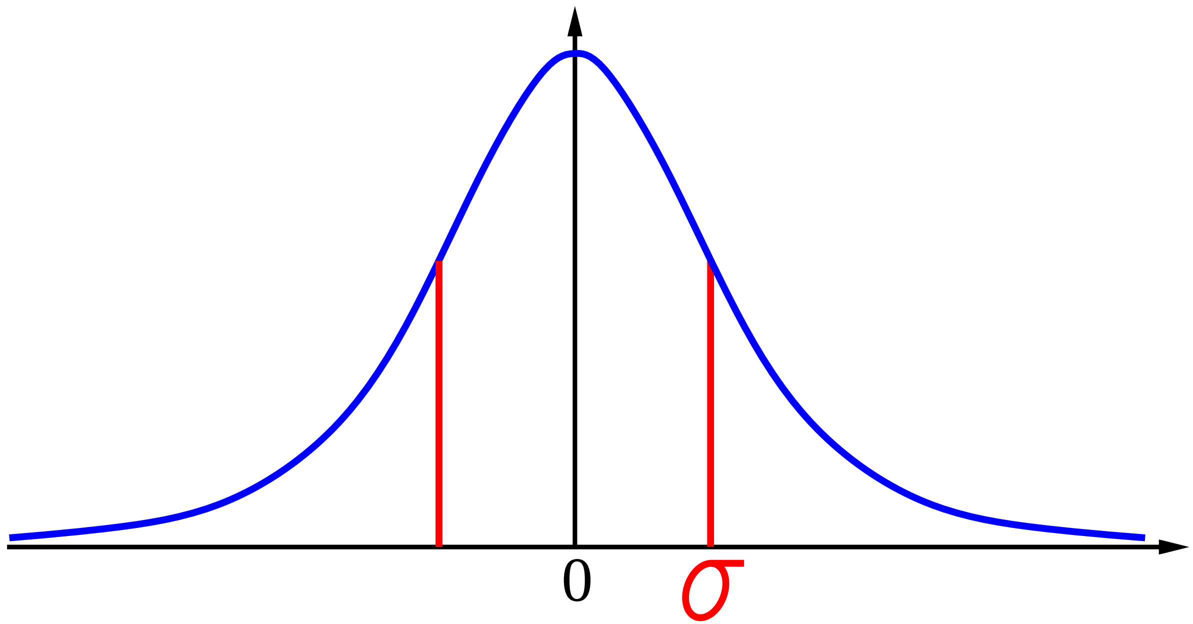
$P(X = 20.5) = 0.125$ stvarno znači

$$\lim_{dx \to 0} P(20.5 \leq X \leq 20.5 + dx)/dx = 0.125$$

Gaussova gustoća

Normalna razdioba $N(\mu, \sigma^2)$,
s očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ

$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$



Uvjetna (naknadna, a posteriori) vjerojatnost

Uvjetna ili naknadna vjerojatnost (engl. "conditional", "posterior"):
imamo neku dodatnu informaciju (dokaz) koju smo već otkrili
i tražimo vjerojatnost događaja uz uvjet da je ta informacija poznata.

Oznaka: $P(događaj|poznato)$.

Na pr., znam da me boli zub (tj. vrijedi $toothache$), pa je
$P(cavity|toothache) = 0.8$.

Točno značenje ovog je:
"uz uvjet da je $toothache$ **sve što znam**, onda ...",
a ne implikacija: "ako $toothache$, onda imam 80% šanse za $cavity$".

Ranije, manje određeno uvjerenje $P(cavity) = 0.2$ još uvijek vrijedi
i nakon što se "dokaz" $toothache$ pojavio,
samo više nije naročito korisno (jer imamo dodatne informacije).

Uvjetna vjerojatnost

Ako znamo još više, na pr. odemo kod zubara i on nađe rupu u zubu, tj. vrijedi $cavity$, onda je

$P(cavity|toothache \wedge cavity) = 1$.

Umjesto veznika $\wedge$, ponekad samo nabrajamo dodatne informacije

$P(cavity|toothache, cavity) = 1$.

Novi dokazi mogu biti irelevantni, što dozvoljava pojednostavljenje

$P(cavity|toothache, pobjedaXY) = P(cavity|toothache) = 0.8$

Ovaj oblik zaključivanja, na bazi poznavanje domene, je bitan!

Napomena: sličnu oznaku koristimo i za uvjetne distribucije:

$\mathbf{P}(Cavity|Toothache)$

Ovo je vektor s 2 elementa, a svaki element je opet vektor s 2 elementa. Dakle, vektor s 4 broja $=$ vjerojatnosti.

Uvjetna vjerojatnost — produktno pravilo

Definicija uvjetne vjerojatnosti:

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)}, \quad \text{ako je} \quad P(b) \neq 0.$$

Vjerojatnost za $a \wedge b$ se "skalira" na domenu u kojoj vrijedi b.

Alternativna formulacija je pravilo produkta — pisano u dva oblika:

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a).$$

Združene i uvjetne distribucije — produktno pravilo

Proširenje zapisa vrijedi i za združene distribucije vjerojatnosti. Na pr.,

$$\mathbf{P}(Weather, Cavity) = \mathbf{P}(Weather|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity)$$

Ovo gledamo kao skup od 4×2 jednadžbe, **ne** kao množenje matrica!

Lančano pravilo izlazi višestrukom primjenom pravila produkta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) &= \mathbf{P}(X_1, \ldots, X_{n-1})\,\mathbf{P}(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1}) \\
&= \mathbf{P}(X_1, \ldots, X_{n-2})\,\mathbf{P}(X_{n-1}|X_1, \ldots, X_{n-2}) \\
&\qquad \mathbf{P}(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= \textstyle\prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1})
\end{aligned}$$

Prvi faktor u produktu je samo $\mathbf{P}(X_1)$.

Zaključivanje enumeracijom (pobrojavanjem)

Najjednostavnija metoda za probabilističko zaključivanje bazira se na potpunoj združenoj distribuciji svih varijabli (= baza znanja)

i svodi se (doslovno) na

pobrojavanje svih mogućnosti iz upita i

zbrajanje pripadnih vjerojatnosti (uz eventualnu normalizaciju).

Primjer: imamo samo 3 Booleove slučajne varijable

$Toothache$ — boli me zub

$Catch$ — zubarska čelična proba se "zakači" u zubu (to boli)

$Cavity$ — imam rupu u zubu.

Dakle, potpuna združena distribucija ima $2 \times 2 \times 2 = 8$ vrijednosti. Pišemo ih u obliku tablice, a ne vektora.

Zbroj svih vrijednosti je (naravno) jednak 1.

Zaključivanje enumeracijom

Početak = potpuna združena distribucija:

	toothache		¬ *toothache*	
	catch	¬ *catch*	*catch*	¬ *catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ *cavity*	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

Za bilo koju propoziciju ϕ, zbroji elementarne događaje gdje je istinita:

$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$

Preciznije bi bilo pisati domenu sumacije kao $\{\omega : \omega \models \phi\}$.

Međutim, elementarni događaji su elementi Kartezijevog produkta svih mogućih vrijednosti slučajnih varijabli (ima ih 8),
a propozicija je neki događaj = podskup u tom produktu.

Zaključivanje enumeracijom

Početak $=$ potpuna združena distribucija:

	$toothache$		$\neg\ toothache$	
	$catch$	$\neg\ catch$	$catch$	$\neg\ catch$
$cavity$	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
$\neg\ cavity$	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

Za bilo koju propoziciju ϕ, zbroji elementarne događaje gdje je istinita:
$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$

Vjerojatnosti za pojedinačne vrijednosti varijabli:

$$P(toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$
$$P(cavity) = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 = 0.2$$

Tzv. marginalizacija $=$ sumiranje po svim vrijednostima ostalih varijabli ($=$ eliminacija tih varijabli iz jednadžbe).

Zaključivanje enumeracijom

Početak $=$ potpuna združena distribucija:

	toothache		$\neg$ *toothache*	
	catch	$\neg$ *catch*	*catch*	$\neg$ *catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
$\neg$ *cavity*	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

Za bilo koju propoziciju ϕ, zbroji elementarne događaje gdje je istinita:

$$P(\phi) = \sum_{\omega \in \phi} P(\omega)$$

$$P(cavity \lor toothache)$$

$$= 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.016 + 0.064 = 0.28$$

Zaključivanje enumeracijom

Početak = potpuna združena distribucija:

	toothache		¬ *toothache*	
	catch	¬ *catch*	*catch*	¬ *catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ *cavity*	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

Možemo izračunati i uvjetne vjerojatnosti (uz dane dokaze):

$$P(\neg cavity | toothache) = \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = \frac{0.08}{0.2}$$

$$= 0.4$$

Normalizacija vjerojatnosti

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ cavity	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

Uvjetna distribucija varijable $Cavity$, uz uvjet (dokaz) $toothache$

– ne treba izračunati $P(toothache)$ u nazivniku!

Nazivnik $=$ normalizacijska konstanta α, tako da zbroj bude jednak 1:

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache) = \alpha\,\mathbf{P}(Cavity, toothache)$$
$$= \alpha\,[\,\mathbf{P}(Cavity, toothache, catch) + \mathbf{P}(Cavity, toothache, \neg catch)\,]$$
$$= \alpha\,[\,\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle\,] = \alpha\,\langle 0.12, 0.08\rangle$$
$$= \{\text{ normalizacija na zbroj} = 1,\ \alpha = 5\ \} = \langle 0.6, 0.4\rangle$$

Zaključivanje enumeracijom — nastavak

Interesantno za praksu: uvjetna združena distribucija nekih varijabli, uz dane dokaze (fiksne vrijednosti) za neke druge varijable.

Ideja: fiksiraj dokaze i zbroji preko svih ostalih (tzv. skrivenih) varijabli.

Neka je

$\mathbf{X}$ popis traženih varijabli iz upita ($Cavity$ u primjeru).

$\mathbf{E}$ popis dokaznih varijabli ($Toothache$ u primjeru) i

$\mathbf{e}$ popis njihovih opaženih (dokaznih) vrijednosti ($toothache$).

$\mathbf{Y}$ popis svih preostalih (neopaženih = skrivenih) varijabli (samo $Catch$ u primjeru).

Upit je $\mathbf{P}(\mathbf{X}|\mathbf{e})$ i može se izračunati kao zbroj (uz normalizaciju na 1):

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}|\mathbf{e}) = \alpha\,\mathbf{P}(\mathbf{X},\mathbf{e}) = \alpha \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{P}(\mathbf{X},\mathbf{e},\mathbf{y})$$

gdje suma ide po svim mogućim kombinacijama vrijednosti neopaženih varijabli $\mathbf{Y}$ (eliminacija skrivenih varijabli, sumiranjem po njima).

Zaključivanje enumeracijom — kraj i problemi

Zašto to radi? $\mathbf{X}$, $\mathbf{E}$, i $\mathbf{Y}$ su sve varijable u domeni, pa se $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{e}, \mathbf{y})$ naprosto "čitaju" iz potpune združene distribucije!

Oznake:

$n =$ broj varijabli (u praksi je lako $n \geq 100$)

$d =$ najveći broj mogućih vrijednosti neke varijable (Boole $d \geq 2$)

Veličina tablice potpune združene distribucije je $O(d^n)$.

Očiti problemi = složenost!

1. Vremenska složenost (najgori slučaj) je $O(d^n)$.
2. Prostorna složenost je opet $O(d^n)$ za spremanje tablice.

Najveći problem — tablica nije prirodna:

3. Kako naći tih $O(d^n)$ brojeva u tablici???

Naime, u tablici (potpune) združene distribucije "svi brojevi su isti"
– nije jasno što je uzrok, a što posljedica veze među varijablama.

Nezavisnost

U praksi — nisu sve varijable uzajamno “uvjetno” vezane
neki događaji su nezavisni, neke varijable su nezavisne.

Događaji a i b su nezavisni ako i samo ako

$$P(a|b) = P(a) \quad \text{ili} \quad P(b|a) = P(b) \quad \text{ili} \quad P(a \wedge b) = P(a)P(b)$$

Varijable X i Y su nezavisne ako i samo ako

$$\mathbf{P}(X|Y) = \mathbf{P}(X) \quad \text{ili} \quad \mathbf{P}(Y|X) = \mathbf{P}(Y) \quad \text{ili} \quad \mathbf{P}(X, Y) = \mathbf{P}(X)\,\mathbf{P}(Y)$$

Primjer: ranijim varijablama $Toothache$, $Catch$, $Cavity$, dodamo još i varijablu $Weather$, s 4 vrijednosti (od prije).

Potpuna združena distribucija

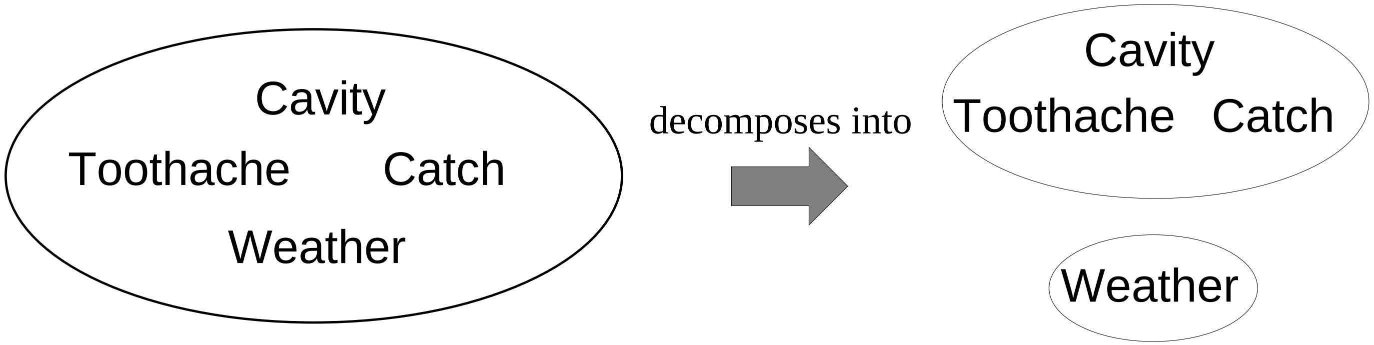
$$\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity, Weather)$$

onda ima $2 \times 2 \times 2 \times 4 = 8 \times 4 = 32$ vrijednosti.

Nezavisnost

Međutim, teško da moji zubni problemi imaju utjecaja na vrijeme. Dakle, $Weather$ je nezavisna od ostale tri varijable, pa je

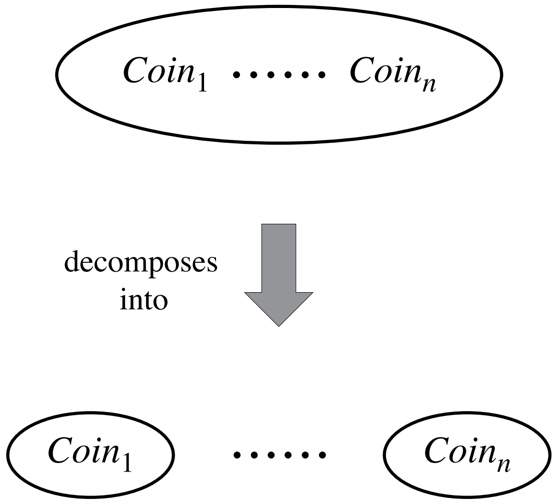
$$\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity, Weather) \\ = \mathbf{P}(Weather)\,\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity)$$



Tablica potpune združene distribucije se "faktorizira" u produkt tablica – umjesto $8 \times 4 = 32$ vrijednosti, dovoljno je pamtiti $8 + 4 = 12$.

Nezavisnost i faktorizacija

Za n nezavisnih bacanja n novčića (svaki ima svoju distribuciju), imamo potpunu faktorizaciju, $2^n \rightarrow 2n$. Za iste novčiće, samo 2.



Apsolutna nezavisnost je vrlo jako svojstvo — ali rijetko u praksi.

Na pr., zubarstvo — ima na desetke bolesti i stotine simptoma, i sve varijable su međusobno vezane — nema nezavisnih!

Što činiti? Treba nam "blaži" koncept nezavisnosti.

Bayesovo pravilo (teorem)

Kod definicije uvjetne vjerojatnosti imali smo dva pravila produkta:

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a).$$

Iz zadnje jednakosti dobivamo vezu uvjetnih vjerojatnosti

$$P(b|a) = \frac{P(a|b)P(b)}{P(a)}$$

koja se zove Bayesovo pravilo (teorem). Ova jednadžba je u pozadini većine modernih sustava za probabilističko zaključivanje u UI.

Zapis u obliku distribucija vjerojatnosti za slučajne varijable je

$$\mathbf{P}(Y|X) = \frac{\mathbf{P}(X|Y)\,\mathbf{P}(Y)}{\mathbf{P}(X)} = \alpha\,\mathbf{P}(X|Y)\,\mathbf{P}(Y)$$

gdje je α normalizacijska konstanta (da zbroj bude 1).

Bayesovo pravilo — nastavak

Prošireni "uvjetni" oblik pravila, uz "dokaze" $\mathbf{e}$ (poznate vrijednosti)

$$\mathbf{P}(Y|X, \mathbf{e}) = \frac{\mathbf{P}(X|Y, \mathbf{e})\,\mathbf{P}(Y|\mathbf{e})}{\mathbf{P}(X|\mathbf{e})}$$

Ovo su samo skraćeni zapisi cijelog sustava jednadžbi
(množenje i dijeljenje su po elementima, nema dijeljenja vektora).

Jednostavna primjena pravila — na pr., u medicini:
često, kao dokaz, opažamo efekt nekog nepoznatog uzroka
i želimo otkriti uzrok.

Oznake: $effect$ = efekt (simptomi), $cause$ = uzrok (bolest),
$P(effect|cause)$ = vjerojatnost u kauzalnom (uzročnom) smjeru,
$P(cause|effect)$ = vjerojatnost u dijagnostičkom smjeru.

Primjena Bayesovog pravila — za dijagnostiku

Nalaženje dijagnostičke vjerojatnosti iz kauzalne vjerojatnosti:

$$P(cause|effect) = \frac{P(effect|cause)P(cause)}{P(effect)}$$

Na primjer, neka je M = meningitis, a S = ukočen vrat, i doktor zna:
$P(s|m) = 0.7$ — meningitis često izaziva ukočen vrat,
$P(m) = 1/50000$ — beuvjetna vjerojatnost za meningitis je mala,
$P(s) = 0.01$ — ukočeni vrat je mnogo češći.

Dijagnostika: imam ukočen vrat, kolika je vjerojatnost da imam meningitis

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = \frac{0.7 \times 1/50000}{0.01} = 0.0014$$

Napomena: naknadna vjerojatnost za meningitis je još uvijek vrlo mala (samo oko 1 od 700 pacijenata s ukočnim vratom ima meningitis).

Kombiniranje više dokaza

Kauzalno znanje je često bolje od dijagnostičkog, tj. dosta često imamo informaciju $P(effect|cause)$.

Kako to iskoristiti kad imamo više opaženih efekata (više simptoma), nazovimo ih $effect_1, \ldots, effect_n$?

Baš ovo je bitno u praksi — medicina, kriminalistika, . . . ,

Na primjer, što zubar može zaključiti (o rupi), ako njegova čelična proba zapne u bolećem zubu pacijenta?

Traži se dijagnoza $\mathbf{P}(Cavity|toothache \wedge catch)$.

Ako znamo potpunu združenu distribuciju, iz tablice se lako čita

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache \wedge catch) = \alpha \, \langle 0.108, 0.016 \rangle \approx \langle 0.871, 0.129 \rangle.$$

No, za veći broj varijabli to ne ide — tablica je prevelika.

Kombiniranje dokaza — Bayesovo pravilo

Primjena Bayesovog pravila daje

$$\mathbf{P}(Cavity|toothache \wedge catch) = \alpha\,\mathbf{P}(toothache \wedge catch|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity)$$

U prvom članu, trebaju nam uvjetne vjerojatnosti $toothache \wedge catch$ za svaku vrijednost varijable $Cavity$.

To je lako za samo dvije dokazne varijable ($Toothache$ i $Catch$).

No, kad imamo n varijabli dokaza (ishodi raznih dijagnostičkih testova) onda imamo (barem) 2^n mogućih kombinacija opaženih vrijednosti za koje treba znati uvjetne vjerojatnosti.

Dakle, ništa bolje od potpune tablice.

Zato su nastale približne metode kombiniranja dokaza.

Iako su odgovori netočni, trebaju puno manje brojeva da daju neki (bilo kakav) odgovor.

Uvjetna nezavisnost

Spas je dodatno znanje o domeni — profinjenjem pojma nezavisnosti u uvjetnu nezavisnost, što onda omogućava pojednostavljenje izraza.

Uočimo da potpuna združena tablica $\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity)$ ima $2^3 - 1 = 7$ nezavisnih elemenata (zbroj mora biti 1).

Bilo bi lijepo da su dokazne varijable $Toothache$ i $Catch$ nezavisne, ali one to nisu:

ako se proba zakači, onda je izgledno da imam rupu i da ta rupa izaziva zubobolju.

Uočiti da ovisnost ide indirektno — preko $Cavity$.

Međutim, ove dokazne varijable jesu nezavisne — uvjetno,

ako znamo da rupe ima, ili da rupe nema.

Uvjetna nezavisnost — nastavak

Rupa izravno "uzrokuje" i jedno i drugo ($Toothache$ i $Catch$), ali ni jedan od dokaza nema izravan utjecaj na drugog.

Ako imam rupu, vjerojatnost da se proba zakači u njoj ne ovisi o tome imam li zubobolju ili ne:

(1) $P(catch|toothache, cavity) = P(catch|cavity)$

Analogno, ista nezavisnost vrijedi i ako nemam rupu:

(2) $P(catch|toothache, \neg cavity) = P(catch|\neg cavity)$

$Catch$ je uvjetno nezavisna od $Toothache$, uz uvjet da znamo $Cavity$:

$\mathbf{P}(Catch|Toothache, Cavity) = \mathbf{P}(Catch|Cavity)$, odnosno,

$\mathbf{P}(Toothache|Catch, Cavity) = \mathbf{P}(Toothache|Cavity)$.

Uvjetna nezavisnost — opća definicija

Dvije slučajne varijable X i Y su uvjetno nezavisne uz zadanu treću varijablu Z, ako za njihove distribucije vjerojatnosti vrijedi produktna formula

$$\mathbf{P}(X, Y|Z) = \mathbf{P}(X|Z)\,\mathbf{P}(Y|Z).$$

Ekvivalentne formule bez produkta su (kao i kod obične nezavisnosti)

$$\mathbf{P}(X|Y, Z) = \mathbf{P}(X|Z), \qquad \mathbf{P}(Y|X, Z) = \mathbf{P}(Y|Z).$$

Slično kao i za apsolutne nezavisnosti, čim imamo uvjetne nezavisnosti u domeni, to omogućava

faktorizaciju potpune združene tablice u manje blokove.

Za razliku od apsolutne nezavisnosti, koja je rijetka u praksi,

Uvjetna nezavisnost je naš osnovni i najjači oblik znanja o nesigurnim okolinama.

Uvjetna nezavisnost — nastavak

Ekvivalentne izreke za uvjetnu nezavisnost $Catch$ i $Toothache$ uz uvjet da znamo $Cavity$:

$$\mathbf{P}(Toothache|Catch, Cavity) = \mathbf{P}(Toothache|Cavity)$$

$$\mathbf{P}(Toothache, Catch|Cavity) = \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\,\mathbf{P}(Catch|Cavity)$$

Kombinacija (konjunkcija) dokaznih varijabli je faktorizirana u pojedinačne kauzalne vjerojatnosti!

Ovo je nešto jače svojstvo od uvjetne nezavisnosti samo "pozitivnih" ishoda $catch$ i $toothache$, uz uvjet $Cavity$:

$$\mathbf{P}(toothache \wedge catch|Cavity) = \mathbf{P}(toothache|Cavity)\,\mathbf{P}(catch|Cavity)$$

Bayesovo pravilo i uvjetna nezavisnost

Kad se vratimo u Bayesovo pravilo, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Cavity|toothache \land catch) \\ &= \alpha\,\mathbf{P}(toothache \land catch|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity) \\ &= \alpha\,\mathbf{P}(toothache|Cavity)\,\mathbf{P}(catch|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity)\end{aligned}$$

U dijagnozi ostaju samo kauzalne vjerojatnosti pojedinačnih dokaza.

Na razini potpune združene distribucije, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity) &= \{\text{ produktno pravilo }\} \\ &= \mathbf{P}(Toothache, Catch|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity) \\ &= \{\text{ produktno pravilo za uvjetnu nezavisnost }\} \\ &= \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\,\mathbf{P}(Catch|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity)\end{aligned}$$

Početna tablica je faktorizirana u produkt tri male tablice.

Drugim riječima, trebamo $2+2+1=5$ nezavisnih brojeva za tablicu.

Bayesovo pravilo i uvjetna nezavisnost

Ovo smanjenje ne izgleda kao bitno, jer je primjer mali.

$$\mathbf{P}(Toothache, Catch, Cavity)$$
$$= \mathbf{P}(Toothache|Cavity)\,\mathbf{P}(Catch|Cavity)\,\mathbf{P}(Cavity)$$

Uvjetna nezavisnost na dvije varijable eliminira samo dva broja.

U čemu je poanta? Konceptualno,
uzrok *Cavity* separira dokazne varijable *Toothache* i *Catch*, jer je izravni uzrok za obje, ali njih dvije nemaju izravan međusobni utjecaj.

U većini slučajeva, korištenje uvjetne nezavisnosti smanjuje veličinu prikaza združene distribucije — s eksponencijalne u n, na linearnu u n.

Rastav velikih probabilističkih domena u
slabo povezane podskupove — preko uvjetne vjerojatnosti,
jedno je od najvažnijih modernih dostignuća UI.

Uvjetna nezavisnost dokaza — naivni Bayesov model

Ovo je primjer u kojem jedan uzrok prozvodi mnogo efekata (dokaza), koji su svi uvjetno nezavisni za dani uzrok.

Uz drugačiji poredak varijabli — prvo uzrok, onda dokazi,

$$\mathbf{P}(Cavity, Toothache, Catch)$$
$$= \mathbf{P}(Cavity)\,\mathbf{P}(Toothache|Cavity)\,\mathbf{P}(Catch|Cavity)$$

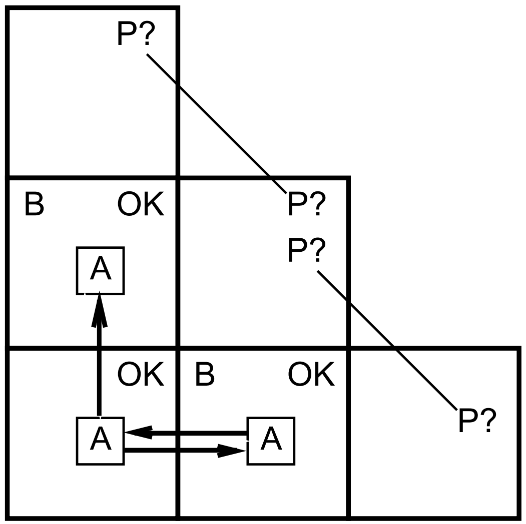
to je primjer tzv. naivnog Bayesovog modela, u kojem je:

$$\mathbf{P}(Cause, Effect_1, \ldots, Effect_n) = \mathbf{P}(Cause)\prod_i \mathbf{P}(Effect_i|Cause)$$

Ukupni broj parametera je **linearan** u n.

Wumpusov svijet — nezgodna situacija

Sjetite se Wumpusovog svijeta — mogućih ponora i opažanja vjetra.



Vjetar na [1, 2] i [2, 1]

$\Rightarrow$ nema sigurne akcije

Uz pretpostavku da su ponori uniformno distribuirani,

[2, 2] ima ponor s vjerojatnošću 0.86,

nasuprot samo 0.31 za ostala dva polja.

Odakle ovi zaključci???

Nesigurnost/neizvjesnost je posljedica djelomičnog opažanja svijeta.

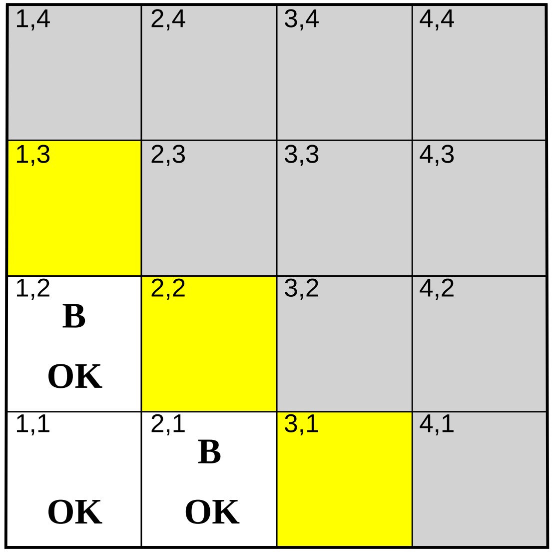
U ovoj situaciji — na pitanje "kamo je treba krenuti"

čisto "logičko" rezoniranje ne može dati odgovor.

Probabilistički agent može izabrati "najbolji" potez.

Wumpusov svijet — vjerojatnost ponora

Cilj: izračunati vjerojatnost da svako od označena tri polja ima ponor.



Ignoriramo Wumpusa i zlato. Bitne stvari u vjerojatnosnom modelu:

(1) ponor izaziva vjetar u svim susjednim poljima,

(2) osim $[1,1]$, svako ostalo polje ima ponor s vjerojatnošću 0.2, i to neovisno o ostalim poljima.

Vjerojatnosni model

Booleove varijable, slično kao u propozicijskom modelu:

$P_{ij} = true$ ako i samo ako $[i, j]$ ima ponor,
$B_{ij} = true$ ako i samo ako na $[i, j]$ ima vjetra.

Vjerojatnosni model uključuje samo $B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}$ za opažena polja.

Potpuna združena distribucija je $\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1})$.

Iskoristimo pravilo produkta i to tako da dobijemo uvjetne vjerojatnosti oblika $P(Effect|Cause)$ — u kauzalnom obliku:

$$\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1}) \\ = \mathbf{P}(B_{1,1}, B_{1,2}, B_{2,1} \,|\, P_{1,1}, \ldots, P_{4,4})\,\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4})$$

Prvi član (faktor):

vrijednosti su 1 ako su vjetrovi susjedni ponorima, a 0 u protivnom.

Vjerojatnosni model — nastavak

Drugi član (faktor) $\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4})$:

ponori su slučajno raspodijeljeni po poljima, s vjerojatnošću 0.2, neovisno o ostalim poljima

Nezavisnost daje faktorizaciju

$$\mathbf{P}(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4}) = \prod_{i,j=1,1}^{4,4} \mathbf{P}(P_{i,j}).$$

Za konfiguraciju svijeta u kojoj imamo točno n ponora vrijedi

$$P(P_{1,1}, \ldots, P_{4,4}) = 0.2^n \times 0.8^{16-n}.$$

Opažanja (dokazi) i upiti

U opisanoj situaciji, raspolažemo sa sljedećim dokazima:

stanje vjetra $=$ ima/nema na svim posjećenim poljima (tri polja), svako od tih polja nije ponor — inače smo umrli.

U skraćenim oznakama, činjenice koje znamo su:

$b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$

$known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$.

Upit je $\mathbf{P}(P_{1,3}|known, b) =$

Koliko je izgledno da $[1,3]$ ima ponor?

Analogno, gledamo pojedinačne upite za ostala dva polja $[2,2]$, $[3,1]$.

Napomena: iz slike odmah možemo uočiti simetriju, tj.

polje $[3,1]$ je ekvivalentno s $[1,3]$.

Zaključivanje enumeracijom

Standardni pristup — zaključivanje enumeracijom, vodi na:
zbrajanje po svim ostalim varijablama u potpunoj združenoj distribuciji ($=$ eliminacija preostalih varijabli iz sume).

Oznaka za ostale varijable (neopažene ili skrivene) — neka je:
$Unknown$ $=$ skup svih preostalih varijabli P_{ij}, osim $P_{1,3}$ i $Known$.

Odgovor enumeracijom na upit je (uz normalizaciju na zbroj $= 1$)

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, known, b, unknown).$$

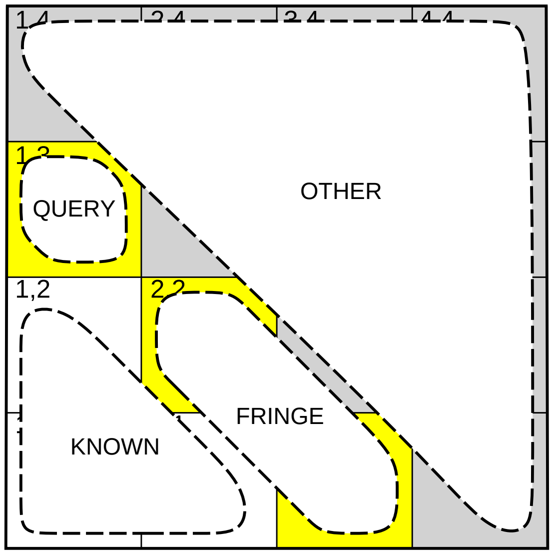
Dakle, sve znamo — do na količinu računanja:
Imamo 12 nepoznatih polja u skupu $Unknown$, pa gornja suma ima $2^{12} = 4096$ članova!

Ovo raste eksponencijalno s brojem polja!

Korištenje susjedstva — uvjetna nezavisnost

Ključna stvar = "susjedstvo" ponora i vjetra (što ga $[4,4]$ ima s $[1,3]$)!
Samo susjedi posjećenih polja su bitni, kao "uzroci" vjetra.

Nepoznate varijable ponora (bez upita) dijelimo u dva disjunktna skupa $Unknown = Fringe \cup Other$, kao na slici

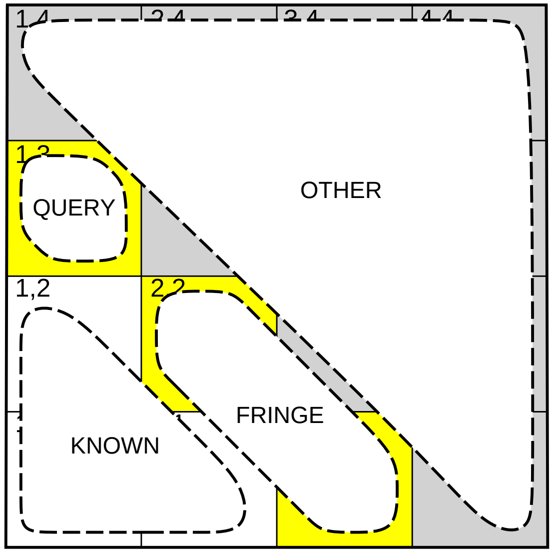


Fringe (ili *Frontier*) — za "granična" polja = susjedna posjećenim,
osim upita, tj. za polja $[2,2]$ i $[3,1]$,

Other — za sva ostala nepoznata polja (ima ih 10).

Korištenje uvjetne nezavisnosti

Opaženi vjetrovi (iz b) su uvjetno nezavisni od ostalih skrivenih polja, tj. od varijabli iz $Other$, uz uvjet da znamo
poznate, granične i upitnu varijablu ponora.



Dakle, vrijedi

$$\mathbf{P}(b \,|\, P_{1,3}, Known, Unknown) = \mathbf{P}(b \,|\, P_{1,3}, Known, Fringe).$$

Ostaje: pretvoriti upit u oblik u kojem se to može iskoristiti!

Transformiranje upita za uvjetnu nezavisnost

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, known, b, unknown)$$

$$= \{ \text{ pravilo produkta } \}$$

$$= \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, unknown) \cdot \mathbf{P}(P_{1,3}, known, unknown)$$

$$= \{ \text{ rastav, nezavisnost } P(unknown) = P(fringe)P(other) \}$$

$$= \alpha \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, fringe, other) \cdot \mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other)$$

$$= \{ \text{ uvjetna nezavisnost u prvom članu — } other \text{ nije bitan } \}$$

$$= \alpha \sum_{fringe} \sum_{other} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, fringe) \cdot \mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other).$$

Transformiranje upita — nastavak

Prvi član u prethodnoj sumi ne ovisi o varijablama iz $Other$, pa ga izlučimo ispred druge sume:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(P_{1,3} \,|\, known, b) \\
&\quad = \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \,|\, P_{1,3}, known, fringe) \\
&\qquad\qquad \cdot \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other).
\end{aligned}$$

Sad iskoristimo nezavisnost svih varijabli ponora za faktorizaciju, pa je

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(P_{1,3}, known, fringe, other) \\
&\qquad\qquad = \mathbf{P}(P_{1,3})\, P(known) P(fringe) P(other).
\end{aligned}$$

Uočimo da $\mathbf{P}(P_{1,3})$ i $P(known)$ ne ovise o indeksima sumacije $fringe$ i $other$ — izlučimo ih ispred svega.

Također, $P(fringe)$ može ispred zadnje sume.

Transformiranje upita — nastavak

Nakon izlučivanja svega što se može izlučiti, dobivamo:

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b)$$

$$= \alpha\, P(known)\, \mathbf{P}(P_{1,3})$$

$$\cdot \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, fringe)\, P(fringe) \sum_{other} P(other).$$

Na kraju, definiramo novu normalizacijsku konstantu $\alpha' = \alpha\, P(known)$ i uočimo da zadnja suma mora biti jednaka 1 ($other$ nestaje), pa je

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b)$$

$$= \alpha'\, \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, fringe)\, P(fringe).$$

Zadnja suma ima samo 4 člana po graničnim varijablama $P_{2,2}$ i $P_{3,1}$, a ostala polja su potpuno eliminirana!

Korištenje uvjetne nezavisnosti — nastavak

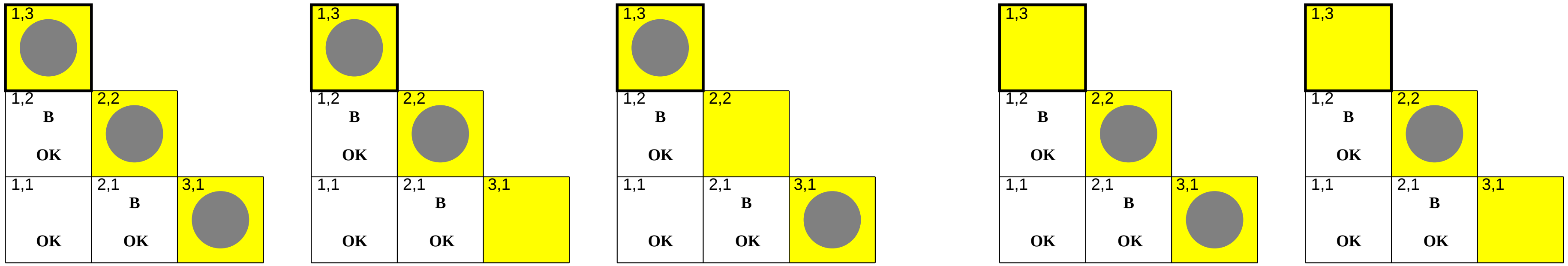
U zadnjoj sumi po $fringe$, vjerojatnost $P(b \mid P_{1,3}, known, fringe)$ ima samo dvije moguće vrijednosti:

1 — ako je granica konzistenta s opažanjima vjetra, i
0 — inače.

Dakle, za svaku vrijednost varijable $P_{1,3}$ (istina, laž), treba zbrojiti sve logičke modele u kojima su
vrijednosti na granici u skladu s poznatim činjenicama.

Svi takvi modeli (3 za istina, 2 za laž) i pripadne početne (a priori) vjerojatnosti dane su na sljedećoj slici (sljedeća stranica):

Odgovori na upite



0.2 x 0.2 = 0.04   0.2 x 0.8 = 0.16   0.8 x 0.2 = 0.16   0.2 x 0.2 = 0.04   0.2 x 0.8 = 0.16

Početne vjerojatnosti treba pomnožiti s pripadnom vjerojatnošću $P_{1,3}$.

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \,|\, known, b) = \alpha \,\langle\, 0.2\,(0.04 + 0.16 + 0.16),\; 0.8\,(0.04 + 0.16)\,\rangle$$
$$\approx \langle\, 0.31, 0.69 \,\rangle$$

Dakle, polje $[1,3]$ (i $[3,1]$, po simetriji) ima ponor s vjerojatnošću 31%.

Na isti način izlazi

$$\mathbf{P}(P_{2,2} \,|\, known, b) \approx \langle\, 0.86, 0.14 \,\rangle.$$

Dakle, naš agent svakako treba izbjegavati polje $[2,2]$.

Sažetak

Vjerojatnost je strogi formalizam za nesigurno znanje

Združena distribucija vjerojatnosti daje vjerojatnost svakog elementarnog događaja

Na upite se može odgovoriti zbrajanjem po elementarnim događajima

U netrivijalnim domenama, treba pronaći način za smanjenje veličine potpune tablice

Nezavisnost i uvjetna nezavisnost su sredstvo za to