1. Rješavanje diskretne Poissonove jednadžbe

1.1. 1D diskretna Poissonova jednadžba

Poissonova jednadžba javlja se kod prijenosa topline, u elektrostatici, gravitacijskom polju, ...

Promotrimo najjednostavniji slučaj diskretne Poissonove jednadžbe u jednoj dimenziji — na nekom otvorenom intervalu, recimo $(0, 1)$. Jednadžba glasi

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1.1.1}$$

pri čemu je funkcija f zadana, a v nepoznata funkcija. Da bi Poissonova jednadžba bila dobro zadana, moramo još zadati rubne uvjete na rubu tog segmenta. U ovom slučaju, uzmimo najjednostavnije rubne uvjete, tj. zahtijevajmo da na rubu segmenta za funkciju v vrijedi

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{1.1.2}$$

Da bismo riješili jednadžbu (1.1.1), zajedno s rubnim uvjetima (1.1.2), moramo je diskretizirati, tj. odabrati niz točaka x_i u kojima želimo naći približno rješenje.

Neka su točke x_i ekvidistantne, tj. neka je

$$x_i = ih, \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad i = 0, \ldots, N+1.$$

Također, neka je približno rješenje jednadžbe u točkama x_i označeno s $v_i = v(x_i)$, i neka je funkcija s desne strane u tim točkama $f_i = f(x_i)$.

Da bismo aproksimirali drugu derivaciju u točkama x_i, za aproksimaciju prve derivacije konstruirat ćemo fiktivne točke x_i^- x_i^+ i u njima ćemo koristiti simetričnu razliku.

Dakle, neka je

$$x_i^- = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \qquad x_i^+ = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Simetrične razlike u tim točkama su

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_i^-} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \qquad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_i^+} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{h}.$$

Aproksimacija druge derivacije u točki x_i je simetrična razlika aproksimacija prvih derivacija u točkama x_i^- i x_i^+. Imamo

$$\left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h}\left(\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_i^+} - \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_i^-}\right) = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2}.$$

Sada uvrstimo aproksimaciju za drugu derivaciju u diferencijalnu jednadžbu (1.1.1), za sve točke x_i. Dobivamo

$$-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

U matričnom obliku, ova jednadžba glasi:

$$T_N v = h^2 f,$$

pri čemu je

$$T_N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$v = [v_1, v_2, \ldots v_N]^T$ nepoznata matrica (vektor) rješenja, a $f = [f_1, f_2, \ldots f_N]^T$ vektor desne strane sustava.

Za matricu T_N tvrdimo da su joj svojstvene vrijednosti jednake

$$\lambda_j = 2\left(1 - \cos\frac{\pi j}{N+1}\right),$$

a svojstveni vektor z_j koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ_j je (po komponentama) jednak

$$z_j(k) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\frac{jk\pi}{N+1}.$$

Najveća svojstvena vrijednost prethodne matrice približno je jednaka 4, dok je najmanja svojstvena vrijednost λ_1 približno jednaka

$$\lambda_1 \approx 2\left(1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{2(N+1)^2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{N+1}\right)^2.$$

U prethodnoj formuli koristili smo aproksimaciju funkcije kosinus s njezina prva dva člana Taylorovog reda.

Sada je odmah jasno da je matrica T_N pozitivno definitna i da je njezina uvjetovanost približno jednaka

$$\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \approx \frac{4(N+1)^2}{\pi^2}.$$

To znači da uvjetovanost brzo raste s porastom broja podintervala (podsjetite se veze uvjetovanosti i rješenja linearnih sustava).